Astr. U
54 ob

Foerster

Studien zur Astrometrie.

Gesammelte Abhandlungen

von

Wilhelm Foerster,

Professor an der Universität und Director der Sternwarte zu Berlin.

BERLIN, 1888.

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Die vorliegenden sechs Abhandlungen sind, wie das Inhaltsverzeichniss näher angiebt, innerhalb der letzten zwanzig Jahre bereits einzeln veröffentlicht worden. Da aber diese Veröffentlichungen für zahlreiche Betheiligte nicht leicht zugänglich sind, erschien es in Folge ausgesprochener Wünsche zweckmässig, dieselben in einer Gesammtausgabe zusammenzufassen.

Berlin, im September 1887.

W. Foerster.

Ueber die bisherigen Annahmen in den Transformations-Elementen der astronomischen Ortsangaben.

I.

Es ist meine Absicht, an dieser Stelle die Grundlagen der bisher am häufigsten angewandten Transformations-Elemente für astronomische Coordinaten-Angaben, die sich auf verschiedene wahre oder mittlere Systeme beziehen, zunächst übersichtlich zusammenzustellen, sodann durch Discussion derselben die allgemeinere Annahme verbesserter oder wenigstens die gleichförmige Annahme bestimmter Werthe befördern zu helfen.

Die vorliegende erste Abtheilung dieser Zusammenstellungen wird sich mit der Säcular-Bewegung der Ecliptik und mit der Präcession beschäftigen.

Die Bewegung der Ecliptik wird in der von Laplace eingeführten Form bestimmt durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} p'' &= \text{Tang. } \pi'' \text{ Sin } \Pi'' \\ q'' &= \text{Tang. } \pi'' \text{ Cos } \Pi'' \end{aligned}\right\} \text{ wo } \pi'' \text{ und } \Pi'' \text{ Polar-Coordinaten des}$$

Poles der bewegten Ecliptik sind, und zwar π'' die Distanz des Poles der jedesmaligen mittleren Ecliptik von dem Pole einer festgehaltenen, zur Fundamental-Epoche T_0 gehörigen Ecliptik, und $\Pi'' - 90°$ der Winkel am Pole der festen Ecliptik, welchen der von letzterem nach dem Pole der bewegten Ecliptik gezogene gröfste Kreis mit der Anfangs-Richtung der Längen-Zählung in der festen Ecliptik macht.

Π'' selbst ist dann die Länge des aufsteigenden Knotens der bewegten Ecliptik in der festen.

Innerhalb einiger Jahrhunderte lassen sich p'' und q'' bequem als Functionen der Zeit ausdrücken durch die Reihen:

$$p'' = g\,t + k\,t^2 \ldots.$$
$$q'' = g't + k't^2 \ldots,$$

wo die Zeit von der Epoche T_0 der Fundamental-Ecliptik aus gezählt werden und die Zeiteinheit das julianische Jahr sein möge.

Für die Coefficienten g, g', k, k', welche abhängig sind von den Massen und den Bahn-Elementen aller die Bewegung der Erde störenden Planeten, sind bisher unabhängige theoretische Bestimmungen ausgeführt worden von Laplace im 6. Buche der Mec. cel., von Le Verrier in der Connaissance des temps für 1843 und 1844, so wie neuerdings im II. Bande der Annales de l'observatoire de Paris und von Lehmann (Astr. Nachr. Nr. 1435, 1439, 1440, 1441, 1507, 1509, 1510, 1544).

Ohne ausführliche Darlegung sind ferner Resultate selbstständiger theoretischer Entwickelungen jener Werthe veröffentlicht worden von Nicolai im Berl. Jahrb. 1820 und von Hansen in der Einleitung der Sonnentafeln und Astr. Nachr. B. 35. Die Werthsysteme von Laplace beziehen sich auf die Fundamental-Epoche 1750,0, die von Nicolai, Lehmann und die beiden älteren von Le Verrier auf die von 1800,0, die neueren von Le Verrier und Hansen auf die von 1850,0.

Die verschiedenen Werth-Systeme, die aus jenen Untersuchungen hervorgegangen sind, werden also, ganz abgesehen von den verschiedenen Massen-Annahmen, schon wegen der Unterschiede der Fundamental-Epochen nicht direct vergleichbar sein.

Wir stellen zunächst die auf gemeinsamer Epoche beruhenden zusammen (die Coefficienten von t^2 sind dabei in Einheiten der 5. Dec. der Bogensecunde ausgedrückt):

Für 1750,0.

		g	g'	k	k'
nach Laplace	I_a	$+0''{,}07672$	$-0''{,}50095$	$+2{,}155$	$+0{,}675$
„ „	I_b	$+0{,}08054$	$-0{,}52114$	$+2{,}311$	$+0{,}712$

Für 1800,0.

nach Nicolai II	$g + 0''{,}0729$	$g' - 0''{,}49400$	k —	k' —
nach Le Verrier III	+ 0,0662	− 0,4857	—	—
nach Le Verrier IV_a	+ 0,0627	− 0,4755	—	—
nach Lehmann V	+ 0,05868	− 0,47244	+ 1,946	+ 0,575

Für 1850,0.

nach Le Verrier IV_b	$g + 0''{,}05888$	$g' - 0''{,}47566$	k + 1,964	k' + 0,568
nach Hansen VI	+ 0,05392	− 0,46784	+ 1,887	+ 0,562

Diese verschiedenen Werth-Systeme wollen wir nun auf ein und dasselbe System von Massen-Annahmen reducieren.

Wir wählen dazu die von Le Verrier im II. Bande der Pariser Annalen adoptirten Planeten-Massen (pag. 59) und die in demselben Bande (pag. 101 und 104) gegebenen Verbesserungs-Coefficienten für Veränderungen in den einzelnen Massen.

Da eine vollständige Discussion der verschiedenen seit Laplace bestimmten Werthe der einzelnen Massen einer besonderen Arbeit überlassen bleiben mufs, wollen wir hier nur angeben, wo die Annahmen, die den obigen Ausdrücken zu Grunde liegen, gefunden werden.

Dem obigen Werthsystem I_a liegen die Massen-Annahmen zu Grunde, welche Laplace im 6. Capitel des 6. Buches der Mec. cel. aufstellt, dem System I_b die im 16. Capitel desselben Buches gemachten Angaben.

Die Werthe von Nicolai II beruhen auf den Massen von Laplace I_a, die Werthe von Le Verrier III auf dem Tableau C. d. T. 1843 (Additions pag. 11), die von Le Verrier IV_a auf C. d. T. 1844 (Additions pag. 58).

Die von Lehmann angenommenen Massen finden sich A.N. 1298 pag. 26, die von Hansen in den Sonnentafeln pag. 1 und 2, wozu wohl noch für die Bestimmung der Bewegung der Ecliptik die dort nicht erwähnte Mercursmasse (wahrscheinlich nach Encke's (früherer) Bestimmung $\frac{1}{4865751}$) hinzugezogen worden ist.

Nach Le Verrier (Annales II. pag. 101 und 104) hat man für die Coefficienten der Massen-Verbesserungen (letztere in Theilen der von Le Verrier angenommenen Massen ausgedrückt), folgende Ausdrücke, wo die Verhältnisse der Verbesserungen zu den Annahmen

für Mercur mit μ
für Venus „ μ_1
für Mars „ μ_3
für Jupiter „ μ_4
für Saturn „ μ_5
für Uranus „ μ_6
für Neptun „ μ_7

bezeichnet sind:*)

$$\begin{aligned}\triangle g &= +0''{,}0063\,\mu + 0''{,}0757\,\mu_1 + 0''{,}0073\,\mu_3 - 0''{,}0250\,\mu_4 \\ &\quad - 0{,}0054\,\mu_5 + 0{,}0000\,\mu_6 - 0{,}0001\,\mu_7 \\ \triangle g' &= -0{,}0052\,\mu - 0{,}2890\,\mu_1 - 0{,}0083\,\mu_3 - 0{,}1601\,\mu_4 \\ &\quad - 0{,}0131\,\mu_5 - 0{,}0001\,\mu_6 - 0{,}0001\,\mu_7\end{aligned}$$

Die obigen Coefficienten der Massen-Verbesserungen müssen natürlich, wenn die Verbesserungs-Quotienten grofs sind, auf die jedesmalige Fundamental-Epoche transformirt werden, wozu die correspondirenden Coefficienten von Laplace (1750) und Lehmann (1800) den Anhalt geben können. —

Wir haben jetzt für die obigen Massen-Systeme, welche den Werthen der g und g' zu Grunde liegen, mit den Verbesserungs-Verhältnissen bezogen auf Le Verrier (1850) Folgendes:

I_a	$\triangle g$	$+0''{,}0105$	$\triangle g'$	$-0''{,}0182$	$g - \triangle g$	$+0''{,}0662$	$g' - \triangle g'$	$-0''{,}4827$
I_b	„	$+0{,}0138$	„	$-0{,}0375$	„	$+0{,}0668$	„	$-0{,}4837$
II	„	$+0{,}0104$	„	$-0{,}0184$	„	$+0{,}0625$	„	$-0{,}4756$
III	„	$+0{,}0036$	„	$-0{,}0029$	„	$+0{,}0626$	„	$-0{,}4828$
IV_a	„	$+0{,}0001$	„	$-0{,}0000$	„	$+0{,}0626$	„	$-0{,}4755$
V	„	$-0{,}0037$	„	$+0{,}0030$	„	$+0{,}0624$	„	$-0{,}4754$
VI	„	$-0{,}0046$	„	$+0{,}0077$	„	$+0{,}0586$	„	$-0{,}4756$

*) Zwischen den Zahlen von Le Verrier für g und g' Annales II. pag. 101 und 104 besteht eine kleine nicht weiter aufgeklärte Differenz.

In dieser Zusammenstellung der reducirten g und g' unterscheiden sich die Werthe I_a, I_b und III noch dadurch von den übrigen, dafs in ihrer Berechnung die Glieder von der 3. Ordnung der Excentricitäten und Neigungen, welche zuerst von Nicolai und seit Le Verrier's Arbeit in C. d. T. 1844 allgemein hinzugefügt worden sind, noch nicht enthalten sind.

Mit Hülfe der Tableaus C. d. T. 1844 pag. 73 kann man diese noch hinzufügen sowie die Reduction auf Le Verrier's Massen für diesen Fall modificiren und erhält dann bezogen auf das Massen-System von Le Verrier IV_b und die Fundamental-Epoche 1800,0 mit Anwendung der Transformationen, welche nach Hansen A. N. 824 pag. 113 für den Uebergang von einer Fundamental-Epoche auf eine spätere betragen in 100 Jahren:

$$dg \; -0''{,}007614$$
$$dg' \; -0{,}000281,$$

die folgende Zusammenstellung:

I_a	$g + 0''{,}0625$	$g' - 0''{,}4756$	von 1750 auf 1800 übertragen.
I_b	0,0625	0,4756	
II	0,0625	0,4756	1800.
III	0,0626	0,4756	
IV_a	0,0626	0,4755	
V	0,0624	0,4754	
VI	0,0624	0,4755	von 1850 auf 1800 übertragen.
IV_b	0,0627	0,4755	

Die verschiedenen Werthe von k und k' lassen sich, da sie Quadrate und Producte der Massen enthalten, nicht so einfach auf ein und dasselbe Massen-System reduciren. Man wird den neueren Bestimmungen derselben überwiegendes Vertrauen schenken müssen.

Aufser den obigen Resultaten theoretischer Ableitungen sind noch zwei Bestimmungen jener Zahlenwerthe vorhanden, deren erste von Bessel sich an die Theorie von Laplace, deren zweite von Peters sich an die Theorie von Le Verrier (IV_a) anschliefst.

Das von Bessel angenommene Massen-System Fund. Astr. pag. 285 — 297 *) unterscheidet sich von dem in I_b zu Grunde gelegten durch die Annahme der Burckhardt'schen Venus-Masse statt der von Delambre bestimmten; die von Peters angenommenen Massen und seine Discussion der Bewegung der Ecliptik findet man „Numerus constans nutationis“ pag. 67 ff.

Aus Bessels Annahmen ergiebt sich $g+0''{,}0714\ g'-0''{,}4837$ für 1750,0
Aus Peters „ „ „ $g+0{,}0602\ g'-0{,}4738$ für 1800,0
ferner hat Peters $k+1{,}91 \quad k'+0{,}59$ in Einheiten der 5. Decimale der Bogensecunde.

Mittelst der Werthe p'' und q'', welche sich auf die feste Ecliptik der Fundamental-Epoche beziehen, kann man nun die Bewegung der mittleren Ecliptik gegen den wahren Aequator vollständig bestimmen, sobald man auch dessen Bewegung gegen die feste Ecliptik, ausgedrückt durch die Lunisolar-Praecession, Nutation und die Säcular-Aenderung seiner Neigung genügend kennt.

Da nun aber durch die Theorie diese Bewegung des Aequators aus anderweitigen Daten nicht genau genug berechnet werden kann, und unmittelbar durch die Beobachtung die Bewegung des wahren Aequators nicht gegen die feste, sondern gegen die mittlere Ecliptik gegeben wird, so gestaltet sich die Aufgabe vielmehr umgekehrt: aus der beobachteten Bewegung des wahren Aequators gegen die bewegte mittlere Ecliptik, deren Lage gegen die Fundamental-Ebene durch p'' und q'' für jede Zeit angegeben werden kann, die Bewegung des Aequators gegen die Fundamental-Ebene zu bestimmen.

Unter den Bewegungen des Aequators gegen die Fundamental-Ebene läfst sich indessen wenigstens ein Theil der periodischen Glieder synthetisch ermitteln, ein anderer Theil (die Nutation während der Mondknoten-Periode) kann mittelst der theoretischen Kenntnifs seiner Form aus den Beobachtungen direct bestimmt werden und erfährt nur sehr feine Aenderungen durch die lang-

*) siehe hierüber die Anmerk. pag. 12.

same Bewegung der Ecliptik. Es bleibt also nur die Bewegung des mittleren Aequators gegen die feste Fundamental-Ebene mit Hülfe seiner durch Beobachtungen bestimmbaren Bewegung gegen die mittlere Ecliptik zu untersuchen oder die säculare Aenderung des Winkels des gröfsten Kreises, der den Pol der festen Ecliptik mit dem des mittleren Aequators zur Zeit t verbindet, gegen denjenigen, welcher beide Pole in der Anfangs-Lage verbindet, d. i. die Lunisolar-Praecession, und die säculare Aenderung der Neigung des Aequators.

Diese Bestimmung kann ausgeführt werden durch die Beobachtung der Veränderungen, welche die Coordinaten fester Punkte, entweder bezogen auf die mittlere Ecliptik oder bezogen auf den mittleren Aequator als Grundebene und auf die Durchschnittslinie beider als Anfangs-Richtung, in einem gewissen Zeit-Intervall erleiden. Man hat allgemein für die Incremente der Polar-Coordinaten, welche aus der Bewegung des Poles der Grund-Ebene an der Sphäre und aus der Bewegung der Anfangs-Richtung in der Grundebene hervorgehen, in bekannten Bezeichnungen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \,\mathrm{Tg}\,\delta.\ \mathrm{Sin}\,(\alpha - N)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n\,\mathrm{Cos}\,(\alpha - N)$$

Hier ist m die Bewegung der Anfangs-Richtung in der Grundebene in der Einheit des Zeitelementes dt, positiv wenn entgegengesetzt der Zählungs-Richtung der α.

n ist die Bewegung des Poles der Grundebene an der Sphäre in derselben Zeiteinheit, ausgedrückt im Bogen gröfsten Kreises.

N ist der Winkel, welchen am Pol der zur Zeit t gehörenden Grundebene das Bogenelement n mit der Anfangs-Richtung der Zählung der Coordinaten α macht, oder $N + 90 = M$ der Winkel, welchen die Linie des aufsteigenden Knotens der Grundebene der Zeit $t + dt$ in der Grundebene der Zeit t mit der Richtung zum mittleren Aequinoctium der Zeit t macht.

Sind α und δ Polar-Coordinaten in dem mittleren Aequatorial-System, so ist bekanntlich $N = 0$*), und man erhält mit genügender Näherung, wenn für die Lunisolar-Präcession ψ der Ausdruck eingeführt wird:

$$\psi = ft + wt^2 \ldots\ldots$$

ferner die Schiefe der festen Ecliptik bezeichnet wird mit ω:

$$n = \frac{d\psi}{dt} \operatorname{Sin} \omega \ldots\ldots = \operatorname{Sin} \omega \{f + 2wt\} \ldots.$$

Bekanntlich ist ω selbst von der Form:

$$\omega = \omega_0 + it^2 \ldots.$$

wo i so klein ist, dafs man innerhalb unserer Annäherung in allen mit ψ, p'', q'' multiplicirten Glieder setzen kann:

$$\omega = \omega_0 \ldots.$$

Die Gröfse m wird sich hier von der Wirkung der Lunisolar-Präcession nur um eine Gröfse unterscheiden, welche von dem Einflufs der gleichzeitigen Bewegung der Ecliptik auf die Verschiebung der Aequinoctial-Linie im bewegten Aequator herrührt und welche durch die Ausdrücke p'' und q'' in Verbindung mit ψ bestimmt werden mufs. Nennen wir λ den Winkel, welchen die beiden den Pol des mittleren Aequators mit dem der mittleren und mit demjenigen der festen Ecliptik verbindenden gröfsten Kreise am Pole des mittleren Aequators einschliefsen, und welcher durch p'', q'', ψ und ω bestimmt werden kann (Präcession durch die Planeten) und setzen wir:

$$\lambda = at + bt^2 \ldots.$$

Man drückt dann m aus durch die Gleichung:

$$m = \frac{d\psi}{dt} \operatorname{Cos} \omega_0 - \frac{d\lambda}{dt} \ldots.$$

und hat also für die Veränderungen der Aequatorial-Coordinaten:

---

*) Genauer ist $N = \nu t, \ldots.$, wo ν nur wenige Hunderttheile der Bogensecunde beträgt.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \operatorname{Cos} \omega_0 - \frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \operatorname{Sin} \omega_0 \operatorname{Tg} \delta \operatorname{Sin} \alpha$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \operatorname{Sin} \omega_0 \operatorname{Cos} \alpha$$

Wenn dagegen α und δ Polar-Coordinaten bezogen auf das mittlere Ecliptical-System sind, dann setzt sich die Gröfse m zusammen aus derjenigen Verschiebung des Aequinoctiums in der Ecliptik, welche eine Folge der Bewegung der Ecliptik ist, und der Wirkung der gleichzeitigen Bewegung des Aequators, welche durch die Lunisolar-Präcession bestimmt wird.

Bezeichnen wir den ersten Theil mit μ, dann haben wir hier folgende Form für m:

$$m = \frac{d\psi}{dt} - \frac{d\mu}{dt}$$

Nun läfst sich nachweisen (u. A. ist dies nachzusehen in der Mécanique céleste, bei Hansen A. N. 823—826, bei Le Verrier Annales II. pag. 172, bei Peters Numerus const. pag. 68 u. A.), dafs mit genügender Annäherung:

$$\mu = \lambda \operatorname{Cos} \omega_0$$

so dafs wir jetzt die zu der im Aequatorial-System gültigen, sehr symmetrische Form von m haben:

$$m = \frac{d\psi}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} \operatorname{Cos} \omega_0 \ldots .$$

Dieses m nennt man entsprechend der zu Grunde gelegten Zeiteinheit die jährliche allgemeine Präcession in Länge. Wir wollen sie in Folgendem, um Verwechselungen der m zu vermeiden, mit $\frac{dP}{dt}$ bezeichnen, also setzen:

$$P = \psi - \lambda \operatorname{Cos} \omega_0 \ldots .$$

Wir müssen nun den Ausdruck λ, sowie die n und N, welche die Bewegung des Poles der mittleren Ecliptik in der Zeiteinheit, bezogen auf das System der mittleren Ecliptik zur Zeit t, be-

stimmen, durch die Ausdrücke p'' und q'', also durch g, g', k, k', darstellen. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen haben wir: (siehe die oben angeführten Abhandlungen dieses Gegenstandes)

$$\lambda = \frac{g}{\text{Sin } \omega_0}\left(t + \right)\frac{k \dot{+} g' f - g' g \text{ Cotg } \omega_0}{\text{Sin } \omega_0} t^2 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{d\pi''}{dt} \ldots\ldots$$

$$N + 90° = M = \Pi'' + P + \frac{d\Pi''}{dt} t \ldots\ldots$$

Die Ausdrücke $\frac{d\pi''}{dt}$, Π'' und $\frac{d\Pi''}{dt}$ ergeben sich aus p'' und q'' durch die Einführungs-Gleichungen:

$$p'' = \text{Tang } \pi''. \text{ Sin } \Pi''$$
$$q'' = \text{Tang } \pi''. \text{ Cos } \Pi''$$

Man findet (wenn man sich in der Entwickelung auf die zweite Potenz von p'' und q'', so wie in dem Ausdruck π'' auf die zweite Potenz der Zeit, in Π'' (dem Winkel- oder Verhältnifs-Ausdruck der kleinen Gröfsen g und g') auf die erste Potenz der Zeit beschränkt und für p'' und q'' die g, g', k, k' einführt):

$$\pi'' = t\sqrt{g^2 + g'^2} + t^2 \frac{gk + g'k'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \ldots.$$

$$\Pi'' = \Pi_0'' + \frac{1}{\text{Sin } 1''} \frac{(g'k - gk')}{g^2 + g'^2} t \ldots$$

$$\text{und Tang } \Pi_0'' = \frac{g}{g'}$$

Mit Eintragung der obigen Ausdrücke für m, n und N hat man also für die Veränderungen der Ecliptical-Coordinaten:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\psi}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} \text{ Cos } \omega_0 + \frac{d\pi''}{dt} \text{ Tang } \delta \text{ Cos } (M - \alpha) \ldots.$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\pi''}{dt} \text{ Sin } (M - \alpha) \ldots.$$

Um nun auch das Gesetz der Veränderung der mittleren Schiefe der Ecliptik, die wir mit ε bezeichnen wollen, zu finden, wendet man am directesten folgende bekannte Gleichung an:

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\omega)=\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\pi''\,\text{Cos}\left\{\Pi''+\frac{\psi+P}{2}\right\}\text{Sec}\,\tfrac{1}{2}\lambda$$

Hier kann man für wenige Jahrhunderte die Ausdrücke 3. Ordnung in Bezug auf die Werthe $(\varepsilon-\omega)$, π'', $\frac{d\Pi''}{dt}$ t, ψ und λ vernachlässigen und also schreiben:

$$\varepsilon-\omega=\pi''\,\text{Cos}\,\Pi_0''-\pi''\,\text{Sin}\,\Pi_0''\left\{\frac{d\Pi''}{dt}\,t+\psi-\tfrac{1}{2}\lambda\,\text{Cos}\,\omega_0\right\}\ldots.$$

$$\text{Da nun}\;\pi''\,\text{Sin}\,\Pi_0''=gt+\frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}\cdot t^2\,\frac{(gk+g'k')}{\sqrt{g^2+g'^2}}\ldots..$$

$$\pi''\,\text{Cos}\,\Pi_0''=g't+\frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\cdot t^2\,\frac{(gk+g'k')}{\sqrt{g^2+g'^2}}\ldots..$$

ferner $\frac{d\Pi''}{dt}=\frac{g'k-gk'}{g^2+g'^2}$, und $\lambda=\frac{gt}{\text{Sin}\,\omega_0}\ldots.$

so hat man zunächst: (mit Beschränkung auf die 2. Potenz der Zeit)

$$\varepsilon-\omega=g't-g\psi t+k't^2+\tfrac{1}{2}g^2t^2\,\text{Cotg}\,\omega_0\ldots.$$

Diese Gleichung zur Bestimmung von ε durch die Ausdrücke g, $g'\ldots.$ enthält noch in ω und ψ die Ausdrücke, welche die gesuchte Bewegung des Aequators gegen die Fundamental-Ebene erst bestimmen sollen.

Da jedoch ω von der Form ist ω_0+it^2 und $\psi=ft+wt^2$ mit g multiplicirt vorkommt, so wird der Einfluſs der Unbekannten i und f hier nur die höheren Glieder treffen und daher mit Näherungswerthen von f, die auch zur Bestimmung von i dienen können, günstig ermittelt werden können.

Wir haben also:

$$\varepsilon-\omega_0=g't+\left\{k'+\tfrac{1}{2}g^2\,\text{Cotg}\,\omega_0-gf+i\right\}t^2\ldots.$$

Da ferner $i=\frac{1}{2}gf\ldots.\}$ wie sich aus der Theorie der Präcession ergiebt: (Num. const. pag. 32)
so hat man:

$$\varepsilon-\omega_0=g't+\left\{k'+\tfrac{1}{2}g\,(g\,\text{Cotg}\,\omega-f)\right\}t^2\ldots.$$

oder $\varepsilon-\omega_0=g't+\left\{k'-\frac{1}{2}g\,\frac{dP}{dt}\right\}t^2\ldots.$

Wir wollen nun mit Hülfe dieser Formeln angeben, welche Zahlen-Werthe in den Ausdrücken λ, π'', Π'', M und $\varepsilon - \omega$ aus den oben zusammengestellten Werth-Systemen der g, g', k, k', hervorgehen. Für die dabei näherungsweise erforderlichen rohen Werthe von f und $\frac{dP}{dt}$ wollen wir gelten lassen: 50″,35 und 50″,22.

Wir besitzen systematische Bestimmungen dieser Art — entweder auf Grund selbstständiger theoretischer Untersuchungen über die Bewegung der Ecliptik (siehe das frühere Tableau derselben), oder mit Benutzung der vorhandenen Theorien und Eintragung von neuen Zahlenwerthen aller durch die Beobachtungen genauer ermittelten Gröfsen — von Laplace im VI. Buche Cap. 16. der Mec. cel., von Bessel Fundamenta astr. und A. N. Nr. 92., von Peters Numerus const. nutationis pag. 68, von Hansen A. N. Nr. 823—826 und Sonnentafeln pag. 6, von Le Verrier Annales de l'obs. de Paris II. pag. 104ff., 171ff. und von Lehmann A. N. Nr. 1619.

Nach Laplace (I_b) für die Fundamental-Epoche 1750,0.*)

$$\begin{aligned}
\lambda &= 0'',20221\, t - 0'',00026018\, t^2 \\
\pi'' &= 0,52732\, t - 0,00000351\, t^2 \\
\Pi'' &= 171^\circ\, 12'\, 53'' \quad - 9'',4\, t \\
M &= 171^\circ\, 12'\, 53'' \quad + 31'',4\, t \\
\varepsilon &= \omega_0 - 0'',52114\, t - 0'',00000269\, t^2 \\
\omega &= \omega_0 \qquad\qquad + 0'',00000982\, t^2
\end{aligned}$$

*) Diese Werthe für Laplace sind aus seinen Ausdrücken für p'' und q'' (Buch 6. Cap. 16) sorgfältig abgeleitet, die von Laplace selbst in demselben Capitel daraus abgeleiteten Werthe, welche auch von Bessel, Fund. pag. 285 und 286 richtig citirt sind, differiren nicht unmerklich davon. Wir haben geglaubt, uns den völlig durchsichtig gebildeten Ausdrücken von p'' und q'', welche auch in den Theorieen von Bouvard's Tafeln maſsgebend gewesen sind, anschliefsen zu müssen.

Nach Bessel: (1750,0).

$$\lambda = 0''{,}17926\,t - 0''{,}00026604\,t^2$$
$$\pi'' = 0{,}48892\,t - 0{,}00000307\,t^2$$
$$\Pi'' = 171^\circ\,36'\,10'' - 5''{,}2\,t$$
$$M = 171\;\;36\;\;10 + 39{,}8\,t$$
$$\varepsilon = 23\;\;28\;\;18{,}0 - 0''{,}48368\,t - 0''{,}00000272\,t^2$$
$$\omega = 23\;\;28\;\;18{,}0 + 0{,}00000984\,t^2$$

Nach Peters: (1800,0).

$$\lambda = 0''{,}15119\,t - 0''{,}00024186\,t^2$$
$$\pi'' = 0{,}4776\;\;t - 0{,}00000345\,t^2$$
$$\Pi'' = 172^\circ\,45'\,32''{,}0 - 8''{,}5\,t$$
$$M = 172\;\;45\;\;32{,}0 + 33{,}2\,t$$
$$\varepsilon = 23\;\;27\;\;54{,}2 - 0''{,}4738\,t - 0''{,}0000014\,t^2$$
$$\omega = 23\;\;27\;\;54{,}2 + 0{,}00000735\,t^2$$

Nach Hansen: (1800,0).

$$\lambda = 0''{,}144963\,t - 0''{,}00023859\,t^2$$
$$\pi'' = 0{,}471247\,t - 0{,}00000327\,t^2$$
$$\Pi'' = 172^\circ\,57'\,51''{,}0 - 8''{,}5\,t$$
$$M = 172\;\;57\;\;51{,}0 + 33{,}2\,t$$
$$\varepsilon = 23\;\;27\;\;54{,}8 - 0''{,}467698\,t - 0''{,}00000141\,t^2$$
$$\omega = 23\;\;27\;\;54{,}8 + 0{,}00000705\,t^2$$

Nach Lehmann: (1800,0).

$$\lambda = 0''{,}14737\,t - 0''{,}00024011\,t^2$$
$$\pi'' = 0{,}4753\;\;t - 0{,}00000331\,t^2$$
$$\Pi'' = 172^\circ\,55'\,12'' - 8''{,}7\,t$$
$$M = 172\;\;55\;\;12 + 32{,}8\,t$$
$$\varepsilon = \omega_0 - 0''{,}47244\,t - 0''{,}0000014\,t^2$$
$$\omega = \omega_0 + 0{,}00000716\,t^2$$

Nach Le Verrier: (1850,0).

$$\begin{aligned}
\lambda &= 0''{,}14790\,t - 0''{,}00024168\,t^2 \\
\pi'' &= 0{,}47929\,t - 0{,}00000323\,t^2 \\
\Pi'' &= 172^\circ\,56'\,37'' \quad - 8''{,}7\,t \\
M &= 172\;\;56\;\;37 \quad\;\; + 32{,}8\,t \\
\varepsilon &= \omega_0 - 0''{,}47566\,t - 0''{,}00000149\,t^2 \\
\omega &= \omega_0 + 0{,}00000719\,t^2
\end{aligned}$$

Soll man unter diesen Werth-Systemen von λ und Π'' die jenigen mit einander verbinden, welche sich auf verschiedene Fundamental-Epochen und Ebenen (resp. Aequinoctien) beziehen, so darf die Uebertragung auf eine gemeinsame Epoche, Ebene und Aequinoctial-Annahme natürlich nicht so geschehen, dafs man z. B. λ nach t differenzirt:

$$\frac{d\lambda}{dt} = a + 2bt$$

dann mit Hülfe des Gliedes $2bt$ die zu verschiedenen Systemen und Epochen gehörenden Werthe von $\frac{d\lambda}{dt}$ auf eine gemeinsame Epoche reducirt, sondern man mufs für jenen Zweck die Elemente der Transformation unabhängig von den obigen höheren Gliedern, welche nur innerhalb eines festen Systems die Veränderlichkeit der Coefficienten der 0ten und ersten Potenzen von t ausdrücken, aus der relativen Lage der Fundamental-Systeme und Epochen berechnen.

Dies geschieht nach folgenden von Hansen A. N. Nr. 826 abgeleiteten Zahlen-Ausdrücken:

Beziehen sich λ, Π'' auf das Fundamental-System der Epoche T
λ_1, Π''_1 „ „ „ T_1

so hat man, wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\lambda &= at + bt^2 \\
\Pi'' &= \Pi''_0 + B''t
\end{aligned}$$

zur Bestimmung von λ_1 und Π''_1 die folgenden Gleichungen, in denen jetzt t von der neuen Epoche an zu zählen ist:

$$\lambda_1 = \{a - 0''{,}00019045\ (T_1 - T)\}\, t + b\, t^2$$
$$\Pi''_1 = \Pi''_0 + 33''{,}2\ (T_1 - T) + B''\, t$$

Natürlich wird auch der Werth des ersten Gliedes in der Lunisolar-Präcession ähnliche besondere Transformationen beim Uebergange auf eine andere Fundamental-Epoche zu erleiden haben, die wir hier der Vollständigkeit wegen sogleich mit beifügen. Es ist in ganz analogen Bezeichnungen:

$$\psi_1 = \{f + 0''{,}00004955\ (T_1 - T)\}\, t + w\, t^2$$

Der Factor von $(T_1 - T)$ in ψ_1 hat hier den Ausdruck

$$\left[2\, w - f\, \mathrm{Cotg}\, \omega_0 \left(\frac{d\,(\varepsilon - \omega_0)}{dt} \right) \right]$$

(siehe die Form von ψ pag. 22).

Dagegen werden die Coefficienten in den Ausdrücken für die Aenderungen der wahren Coordinaten (m und n), also auch für die allgemeine Präcession in Länge solcher besonderen Transformationen nicht bedürfen, da sie von der Beziehung auf die feste Ebene gelöst sind. Man wird in denselben den doppelten Coefficienten von t^2 unmittelbar zur Uebertragung des Coefficienten von t auf eine andere Anfangs-Epoche benutzen können.

Es wird dies Resultat und damit eine Controle der obigen Transformations-Werthe auch gefunden, wenn man die betreffenden Ausdrücke von m, n und P mit Anwendung der besonderen Transformations-Coefficienten aus ψ und λ und ω zusammensetzt. (Natürlich mufs man dann hier auch die Werthe von b und w nach Hansen anwenden). —

Von den obigen Systemen werden die vier letzten der Wahrheit jedenfalls näher kommen, wie die beiden ersten, welche, wie oben gezeigt worden ist, durch Abkürzungen bei der Entwickelung merklich afficirt sind und auf ungenaueren Massenwerthen beruhen. In Bezug auf die Abhängigkeit der Ausdrücke λ, π'', $\varepsilon - \omega$ von den eventuellen Massen-Verbesserungen können wir auf

die Gleichungen pag. 10 verweisen, da λ, π'' und $\varepsilon - \omega$ in sehr einfacher Weise von g und g' (p'' und q'') abhängen. Die entsprechenden Verbesserungs-Ausdrücke für Π'' findet man bei Le Verrier Annales II. pag. 105. Diese Verbesserungen beziehen sich natürlich nur auf das System IV$_b$, können aber leicht auf die andern Massen übertragen werden.

Unter den obigen Ausdrücken sind für die Beobachtungen von besonderer Wichtigkeit ε und λ, und durch die Vergleichung der obigen Annahmen mit den Beobachtungs-Resultaten für ε und λ kann ein äufseres Criterium für den Vorzug eines der obigen Systeme hergestellt werden.

Vergleichen wir zunächst die Beobachtungs-Resultate für ε mit den obigen Annahmen.

Aus den Beobachtungen zwischen 1750 und 1825 hat Bessel für die jährliche Abnahme von ε gefunden:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -0''{,}457$$

Aus den Beobachtungen Bradley's verglichen mit den Dorpater Bestimmungen der Schiefe der Ecliptik um 1825 leitet Peters ab (Num. const. nut. p. 66).

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -0''{,}4645.$$

Endlich findet Le Verrier bei der Discussion der Sonnen-Beobachtungen von Greenwich, Palermo, Königsberg und Paris zwischen 1755 und 1846 den folgenden Ausdruck:

$$\varepsilon\,(1850{,}0) = 23^\circ\,27'\,31''{,}83 - 0''{,}4576\,t \ldots.$$

Der beobachtete Werth der jährlichen Abnahme, welcher von $0''{,}46$ nicht viel abzuweichen scheint, würde also ceteris paribus auf das obige Werthsystem von Hansen, dessen $\frac{d\varepsilon}{dt}$ ihm am Nächsten kommt, als das wahrscheinlichste hinweisen. —

Es wird erwünscht sein, bei dieser Gelegenheit eine Zusammenstellung der jetzt in den verbreiteten Ephemeriden gebräuchlichen Werthe der mittleren Schiefe der Ecliptik gegeben zu sehen.

In dem Berliner Jahrbuch wird nach Hansen angenommen

$$\varepsilon = 23^\circ\,27'\,31''{,}42 - 0''{,}46784\,(t - 1850{,}0) - 0''{,}01405\left(\frac{t-1850{,}0}{100}\right)^2 \ldots.$$

Im dem englischen Nautical-Almanac und in der Connaissance des temps setzt man nach Le Verrier an: (Sonnentafeln Annales IV. pag. 203)

$$\varepsilon = 23^\circ\,27'\,31''{,}83 - 0''{,}47594\,(t - 1850{,}0) - 0''{,}0149\left(\frac{t-1850{,}0}{100}\right)^2 \ldots..$$

Der Werth $0''{,}47594$ statt des oben in dem Le Verrier'schen Werth-System angegebenen $0''{,}47566$ erklärt sich durch eine Aenderung, welche Le Verrier in den Massen der Venus und des Mars bei der Discussion der periodischen Störungen der Erde gefunden hat. (Annales IV. pag. 95 ff.) Gegen die Annahmen des obigen Massen-Systems IV_b treten dadurch die Verbesserungs-Factoren ein:

$$\mu_1 = +\,0{,}004$$
$$\mu_3 = -\,0{,}105$$

durch deren Einführungen in die Verbesserungs-Gleichungen man leicht den Uebergang auf $0''{,}47594$ findet. Die definitiven Massen giebt Le Verrier Annales IV. pag. 102. Aus den Discussionen von Peters (l. c.) geht hervor:

$$\varepsilon = 23^\circ\,27'\,31''{,}00 - 0''{,}4645\,(t - 1850{,}0) \ldots.$$

Dies ist in der American Ephemeris adoptirt, wogegen den Sonnen-, Mond- und Planeten-Oertern derselben die Formel von Hansen zu Grunde liegt.

Es wird offenbar von immer gröfserer Wichtigkeit, durch Hinzufügung neuerer Beobachtungen der Solstizien die Kenntnifs der Bewegung der Ecliptik zu vervollkommnen und das wichtige Element der Schiefe sicherer festzustellen. —

Eine andere Prüfung der Annahmen über die Bewegung der Ecliptik könnte die durch Beobachtung der Veränderung der Aequatorial-Coordinaten fester Punkte zu erhaltende Bestimmung von λ gewähren.

Trägt man in die obigen Ausdrücke für $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ (pag. 10) die Ausdrücke von ψ und λ durch die Zeit ein, so folgt:

$$\frac{d\alpha}{dt} = (f+2wt)\,\mathrm{Cos}\,\omega_0 - (a+2bt) + (f+2wt)\,\mathrm{Sin}\,\omega_0\,\mathrm{Tang}\,\delta.\,\mathrm{Sin}\,\alpha \ldots.$$

$$\frac{d\delta}{dt} = (f+2wt)\,\mathrm{Sin}\,\omega_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha \ldots.$$

Nun wird bekanntlich mit Vernachlässigung der Glieder, welche die Differential-Quotienten dritter und höherer Ordnung von α und δ nach t enthalten, der endliche Unterschied der Rectascensionen α' (zur Zeit t') und α (zur Zeit t) so wie der Declinationen δ' (zur Zeit t') und δ (zur Zeit t) durch die ersten Differential-Quotienten $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ mit genügender Annäherung innerhalb des Jahrhunderts und für Declinationen unter 60° ausgedrückt, wenn man bildet:

$$\frac{d\alpha_0}{dt} = \left[f+2w\left(\frac{t+t'}{2}\right)\right]\mathrm{Cos}\,\omega_0 - \left[a+2b\left(\frac{t+t'}{2}\right)\right]$$
$$+\left[f+2w\left(\frac{t+t'}{2}\right)\right]\mathrm{Sin}\,\omega_0\,\mathrm{Tg}\left(\frac{\delta+\delta'}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)\ldots.$$

$$\frac{d\delta_0}{dt} = \left[f+2w\left(\frac{t+t'}{2}\right)\right]\mathrm{Sin}\,\omega_0\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)\ldots.$$

$$\alpha'-\alpha = \frac{d\alpha_0}{dt}(t'-t)\ldots.$$

$$\delta'-\delta = \frac{d\delta_0}{dt}(t'-t)\ldots.$$

Setzen wir: $\left[f+2w\left(\frac{t+t'}{2}\right)\right]\mathrm{Cos}\,\omega_0 - \left[a+2b\left(\frac{t+t'}{2}\right)\right] = m_0$

$$\left[f+2w\left(\frac{t+t'}{2}\right)\right]\mathrm{Sin}\,\omega_0 = n_0$$

dann können also m_0 und n_0 durch Vergleichung der in den Epochen t und t' beobachteten Rectascensionen und Declinationen fester Puncte ermittelt werden, und man hat dann:

$$a + 2b\left(\frac{t+t'}{2}\right) = n_0 \operatorname{Cotg} \omega_0 - m_0$$

oder da b als durch die Theorie der Bewegung der Ecliptik sicher genug vorausbestimmt gelten kann, wird:

$$a = n_0 \operatorname{Cotg} \omega_0 - m_0 - 2b\left(\frac{t+t'}{2}\right)$$

Auf diese Weise würde λ und g durch Beobachtungen direct ermittelt werden können; aber diese Bestimmung ist nur für g so beschaffen, dafs die unvermeidlichen Beobachtungs-Fehler in $(\alpha' - \alpha)$ und $(\delta' - \delta)$ unvergröfsert darauf einwirken. — Im Allgemeinen wird man vorziehen, λ aus dem in den säcularen Störungen der Erdbahn erhaltenen Werthe g abzuleiten und dann aus den Werthen m_0 und n_0, welche die Beobachtung der Coordinaten-Aenderungen von Fixsternen giebt, zwei Werthe von f zu berechnen, deren Uebereinstimmung ein Maafs für die Genauigkeit dieser Bestimmung der Lunisolar-Präcession gewährt. Man stellt die Gleichungen also folgendermaafsen:

$$\left.\begin{aligned} f + 2w\left(\frac{t+t'}{2}\right) &= \left[m_0 + a + 2b\left(\frac{t+t'}{2}\right)\right] \operatorname{Sec} \omega_0 \\ f + 2w\left(\frac{t+t'}{2}\right) &= n_0 \operatorname{Cosec} \omega_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} F.$$

Hat man $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ für eine grofse Anzahl von gut vertheilten Sternen beobachtet, so wird das dadurch gefundene m_0 überwiegend den Fehler der beiden Bestimmungen der Aequinoctial-Puncte oder der absoluten Rectascensionen zur Zeit t und t' enthalten, während n_0 von der inneren Genauigkeit der Declinationen oder der blofsen Rectascensions-Differenzen innerhalb jedes Systems abhängen wird.

Setzen wir den Fehler einer absoluten Declination und einer Rectascensions-Differenz (Stern — Sonne) näherungsweise einander gleich und $= \triangle$, so wird bekanntlich im günstigsten Falle der Fehler einer einzelnen absoluten Rectascensionsbestimmung $= \triangle \sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2 \varepsilon}$ oder $= \triangle \operatorname{Cosec} \varepsilon$ (wofür auch ohne Weiteres $\triangle \operatorname{Cosec} \omega$ zu schreiben ist).

Die Fehler in der Bestimmung von f durch die beiden Gleichungen F werden also, soweit sie von der Beobachtung der α und δ abhängen, in der ersten Gleichung überwiegend proportional zu Cosec ω Sec ω, in der zweiten Gleichung im Ganzen und Grofsen zu Cosec ω.

Die Lunisolar-Präcession wird also ceteris paribus aus beiden Gleichungen ungefähr mit demselben Gewicht bestimmt, da die obigen Annahmen über die Relationen der Fehler von der Wirklichkeit nicht stark abweichen werden. — Die Bestimmung durch n_0 vermöge der Declinationen wird aber den Vorzug haben, dass man durch cyklische Anordnung derselben constante Unterschiede der beiden Declinations-Systeme eliminiren und selbst ermitteln kann.

Für die Werthe von der Form m_0 und n_0 sind nun 2 systematische Bestimmungen vorhanden, die eine von Bessel (Fund. astr. pag. 286 ff. und Astr. Nachr. 92), die zweite von O. Struve (Bestimmung der Constante der Präcession etc. Petersburg 1842).

Die definitiven Werthe von Bessel (A. N. Nr. 92) sind das Resultat eines ziemlich zusammengesetzten Verfahrens:

In den Fundamentis astr. pag. 289—295 sind durch Vergleichung der α und δ von über 2000 Sternen, welche den Catalogen von Bradley und Piazzi gemeinsam sind, Werthe von m_0 und n_0 ermittelt:

$$m_0 = 45''{,}987669$$
$$n_0 = 20{,}064472$$

Diese Zahlen gelten für die zweite Edition von Piazzi's Cataloge; als Epoche von Bradley ist 1755,0, von Piazzi 1800,0 angenommen, so dafs, wenn wir als Fundamental-Epoche 1750,0 wählen, $t = +5$, $t' = +50$ wird und $\frac{t+t'}{2} = +27{,}5$.

Die aus jenen beiden Werthen mit Hülfe von Bessel's obiger Annahme für λ abgeleiteten Werthe der Lunisolar-Präcession werden jedoch in den A. N. 92 einer Verbesserung unterworfen:

Bei der späteren Vergleichung der Königsberger Fundamental-

Cataloge von 1815 und 1825 mit dem wegen der Nutations-Correction nach Lindenau um $-0''{,}5$ verbesserten Bradley'schen Cataloge findet Bessel, dafs die zwischen jenen Epochen liegenden Rectascensionen von Piazzi beträchtlicher Correctionen bedürfen, welche sich bei der Interpolation zwischen Bradley 1755 und Bessel 1815 im Mittel auf $+1''{,}91$, bei der Interpolation zwischen Bradley 1755 und Bessel 1825 im Mittel auf $+1''{,}26$ belaufen.

Wird demnach Piazzi mit Anwendung des arithmetischen Mittels $+1''{,}585$ beider Correctionen auf ein Rectascensions-System bezogen, welches die Mitte zwischen den beiden Königsberger Systemen 1815 und 1825 hält und auf Piazzi's Epoche mit Hülfe der Präcession, die aus Bessel 1820 und dem um $-0''{,}5$ corrigirten Bradley 1755 folgt, reducirt ist, so mufs der so verbesserte Piazzi 1800 verglichen mit dem corrigirten Bradley 1755 natürlich entsprechende Präcessions-Ausdrücke geben wie 1820—1755, aber gültig für 1777,5.

Die Correction für Piazzi — Bradley $= +2''{,}085$ bedingt also für das obige m_0 (1777,5) die Verbesserung $+\frac{2''{,}085}{45} = +0''{,}046333$.

Mit den so hergestellten Werthen: $\left.\begin{matrix} m_0 = 46''{,}034002 \\ n_0 = 20{,}064472 \end{matrix}\right\}$ 1777,5.

von denen also m_0 auf einem Intervall von 65, n_0 von 45 Jahren beruht, und mit $\frac{t+t'}{2} = +27{,}5$, sowie $\omega_0 = 23^\circ\,28'\,18''{,}0$

$$\text{ferner } \lambda = +0''{,}17926\,t - 0''{,}00026604\,t^2$$

hat man dann nach den Gleichungen F:

$$f + w\,.\,55 = \{46''{,}034002 + 0''{,}17926 - 0''{,}00026604 \times 55\}\ \text{Sec}\ \omega_0$$
$$f + w\,.\,55 = 20{,}064472\ \text{Cosec}\ \omega_0.$$

Hieraus folgen nach Bessel die beiden Werthe: (von Bessel auf einem etwas andern Wege berechnet, wobei in der letzten Stelle eine kleine Differenz mit dem Resultate vorstehender Form eintreten konnte)

$$f = 50''{,}36606 - 55 \cdot w$$
$$f = 50{,}37586 - 55 \cdot w.$$

Zur Bestimmung von w hat man nun aus der Theorie der Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt folgende Formel für die Lunisolar-Präcession:

$$\psi = \frac{3\,K\,A}{4\,\pi\,s\ \mathrm{Sin}\ 1''}\left\{ k_1^2\ E_1 + k_2^2\ E_2 \right\} \mathrm{Cos}\ \omega_0\ .\ t$$
$$+ \frac{3\,K\,A}{8\,\pi\,s\ \mathrm{Sin}\ 1''}\left[g'\,\frac{\mathrm{Cos}\ 2\,\omega_0}{\mathrm{Sin}\ \omega_0}\,(k_1^2\ E_1 + k_2^2\,E) + 3\,k_1^2\,e\cdot\frac{de}{dt}\,\mathrm{Cos}\ \omega_0 \right] t^2.$$

Hier ist K der von der Gestalt und Massenvertheilung des Erdkörpers abhängige Coefficient, dessen Näherungs-Werth unter Voraussetzung des homogenen zweiachsigen Ellipsoides nach Poinsot sein würde $= \frac{\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2}{1 - \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2}$ (wo α die Abplattung des Erd-Sphäroids bedeutet), s das Verhältnifs des mittleren Tages zum Sterntage, A die Anzahl von mittleren Tagen in der Einheit von t, k_1^2 und k_2^2 resp. die beschleunigenden Kräfte, welche die Sonne und der Mond in ihrer mittleren Entfernung von der Erde äufsern, (zugleich ausgedrückt in dieser resp. Einheit und in der Zeiteinheit des mittleren Tages).

E_1 ist $= 1 + \frac{3}{2}e^2$ wenn e den Anfangs-Werth der Excentricität der Erdbahn für die Fundamental-Epoche bedeutet ($\frac{de}{dt}$ ihre jährliche Veränderung).

E_2 ist in ähnlicher Weise aus den Haupt-Coefficienten in dem allgemeinen Ausdruck der Entfernung des Mondes gebildet und enthält aufserdem den Factor $1 - \frac{3}{2}$ Tang $^2 i$ (i die Neigung der Mondsbahn) {siehe Num. const. nut. pag. 26 ff}.

Setzen wir also unseren bisherigen Ausdruck für ψ ein, so haben wir:

$$f = \frac{3\,K\,A}{4\,\pi\,s\ \mathrm{Sin}\ 1''}\left\{ k_1^2\ E_1 + k_2^2\ E_2 \right\} \mathrm{Cos}\ \omega_0$$
$$\omega = f g'\ \mathrm{Cotg}\ 2\,\omega_0 + \tfrac{3}{2} f\ .\ e\,\frac{de}{dt}\left(\frac{k_1^2}{k_1^2\ E_1 + k_2^2\ E_2}\right)$$

Wenn wir hier mit Vernachlässigung der Glieder, welche w mit g' oder $e \cdot \frac{de}{dt}$ multiplicirt enthalten, das Mittel aus den beiden obigen Werthen von f eintragen und zur Bestimmung von $\frac{k_1^2}{k_1^2 E_1 + k_2^2 E_2}$ (welches mit dem überaus kleinen Werthe $\frac{3}{2} fe \frac{de}{dt}$ (etwa 0",00000054) multiplicirt ist) einen genäherten Werth der Mondmasse in Theilen der Summe von Erd- und Mondmasse nebst der siderischen Umlaufszeit des Mondes herbeiziehen, etwa annehmen $\frac{k_1^2}{k_1^2 E_1 + k_2^2 E_2} = \frac{1}{3}$ dann erhalten wir für w je nach der Annahme von g' und $e \frac{de}{dt}$ folgende Werthe:

Nach Laplace (von Bessel adoptirt)	$w = -$ 0",00012179
Nach Hansen (A. N. 826)	$w = -$ 0,00010674
Nach Peters (Num. const. Nut. p. 71)	$w = -$ 0,00010836
Nach Le Verrier (Annales II. p. 174)	$w = -$ 0,00010881
Nach Lehmann (A. N. 1619)	$w = -$ 0,0001080

Mit dem Werthe w von Laplace findet Bessel nun aus den obigen beiden Gleichungen die beiden Werthe:

$$f = 50",37275$$
$$f = 50,38255$$

Die Verschiedenheit beider kann von den Beobachtungs-Fehlern und von der Ungenauigkeit der Annahme für $\frac{d\lambda}{dt}$ herrühren.

Berechnen wir das erforderliche $\frac{d\lambda}{dt}$ nach Hansen's oben gegebener genauerer Formel, nachdem dieselbe auf 1750,0 transformirt ist, woraus sich für 1777,5 ergiebt: $\frac{d\lambda}{dt} = 0",14136$, so wird die Differenz der beiden Resultate für f noch um 0",02537 grösser.

Die Anwendung des Werthes λ von Le Verrier, transformirt auf die Fundamental-Bedingungen für 1750,0, giebt für 1777,5 $\frac{d\lambda}{dt} = 0",15365$ und damit eine Vergrösserung des fraglichen Unter-

schiedes um 0"01197. Der Hauptantheil des Unterschiedes wird also in den Fehlern der Beobachtungen liegen. —

Den definitiven Werth für f leitet Bessel aus den obigen beiden schliefslich ab durch Hinzufügung der Bedingung, dafs derselbe mit unverändertem $\frac{d\lambda}{dt}$ Werthe von m_0 und n_0 ergeben solle, die von den beobachteten m_0 und n_0 gleichweit abweichen und findet so:

$\frac{d\psi}{dt}$ für 1777,5 = 50"36902 und

für $T = 1750{,}0$ $\psi = 50"37572\ t - 0"00012179\ t^2$ . . . . .

Die zweite Bestimmung der Lunisolar-Präcession, ausgeführt durch O. Struve, hat erstlich den Vorzug vor der Bessel'schen, dafs sie Bradley's Beobachtungen (1755) mit den Beobachtungen von Dorpat (1825) verbindet, welche ungleich genauer sind als die mit vielen noch unerkannten Fehlern behafteten von Piazzi. Dies trifft jedoch nur die Bestimmung von n_0, da die Bessel'sche Bestimmung von m_0 im Wesentlichen auf 2 Königsberger Aequinoctial-Bestimmungen beruht, welche sich mit dem in Dorpat für 1825 festgestellten Aequinoctium wohl vergleichen lassen. Die geringere Güte der Piazzi'schen Beobachtungen, welche den Bessel'schen Werth von n_0 insbesondere afficirt, wird durch die gröfsere Anzahl der von Bessel discutirten Beobachtungen von Piazzi (2500 Beobb. in Palermo gegen 400 Dorpater Beobachtungen) gewifs nicht völlig ausgeglichen.

Aufser jenem Vorzuge enthält die Struve'sche Bestimmung, was bei der geringeren Zahl der Sterne auch in höherem Grade erforderlich war, eine eingehende Berücksichtigung auch derjenigen Coordinaten-Aenderungen, welche die Sterne durch die gegen die Werthe ihrer Coordinaten merklichen Verschiebungen des Ursprunges oder Anfangs-Punktes der Coordinaten erfahren, d. h. der Bewegungen unseres Sonnensystems.

Während in den obigen Formeln unter Annahme der unveränderten Lage der Sterne gegen den Ursprung der successiven Coordinaten-Systeme nur diejenigen Veränderungen der Coordinaten, welche durch die Veränderungen der Richtungen der Coordinaten-Axen entstehen, berücksichtigt sind, ist es strenger genommen nothwendig, nicht nur die Ortsveränderungen des Anfangs-Punktes der Coordinaten-Zählung, sondern auch die wirklichen Ortsveränderungen der Sterne selbst, welche von derselben Ordnung wie die Bewegungen des Schwerpunktes unseres Sonnensystems sein können, in Rechnung zu ziehen.

Die grofse Schwierigkeit, aus den Coordinaten-Aenderungen nicht fester Punkte, von einem merklich gegen dieselben bewegten Anfangs-Punkte ausgemessen, nur die Bewegungen der Coordinaten-Axen herauszufinden, ohne dafs man die relativen Bewegungen jener Punkte gegen den Anfangs-Punkt in einem festen Coordinaten-System kennt, diese Schwierigkeit hat Bessel bekanntlich mittelst der grofsen Zahl der verglichenen Sterne dadurch zu lösen gesucht, dafs er durch cyklische Summirung der Bewegungs-Werthe die Wirkung der Bewegung unseres Standpunktes nahezu eliminirt und in dem arithmetischen Mittel aus einer grofsen Menge von Sternbewegungen überhaupt den Einfluſs der noch regellosen eigenthümlichen Bewegungen derselben, gewissermafsen wie denjenigen zufälliger Fehler, beträchtlich verringert glaubte. —

Struve hat vermittelst eines Systems von anderweitig plausibel gemachten Hypothesen über die relativen Entfernungen der verglichenen Sterne den Einfluſs wenigstens der Bewegung des Sonnensystems directer und durchsichtiger, als durch cyklische Summirung geschehen kann, zu eliminiren gesucht und dadurch einen entschiedenen Fortschritt in der Lösung des Problems angebahnt.

Wahrscheinlich wird man jedoch zunächst eine Fortbildung der numerischen Kenntnifs der Präcessions-Erscheinungen noch mehr auf die summarische Behandlung der Bewegungen einer grofsen Zahl gerade der lichtschwächeren Sterne begründen

müssen, wie man stets auf den rohen Annahmen über die Bewegung des voraussichtlich Entfernteren die feinere Kenntnifs des Näheren erbaut hat. —

Struve findet für die Bessel'sche Annahme von n pro 1790 aus dem Intervall 1755—1825 die Correction

$$\triangle n = + 0''00375$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler 0″00488.

Für das Bessel'sche m pro 1790 findet er, nachdem die Beobachtungen Bradley's durch die Correction $\triangle \alpha = - 0''31$, die Dorpater Beobachtungen durch die Correction $\triangle \alpha = - 0''42$ auf das durch die Peters'sche Nutation richtiger bestimmte, jedesmalige mittlere Aequinoctium bezogen sind, (bei Bessel's beiden Aequinoctium 1815 und 1825 hoben sich die entsprechenden Correctionen nahezu auf) die Correction:

$$\triangle m = + 0''01520$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler 0″00430.

Nach O. Struve (pag. 22) ist der Unterschied der Bestimmung der Aequinoctial-Punkte:

$$\text{Struve (1825)} - \text{Bessel (1825)} = + 0''98$$

und da nach A. N. 92. Bessel (1825) − Bessel (1815) = − 0,65 wird: $\text{Struve (1825)} - \frac{1}{2}\{\text{Bessel (1825)} + \text{Bessel (1815)}\} = + 0''66$.

Es ist also zwischen den corrigirten Differenzen

$$\{\text{Str. (1825)} - 0''42\} - \{\text{Br.} - 0''31\}$$

und $\text{Bessel}\left(\frac{1815+1825}{2}\right) - \{\text{Br.} - 0''50\}$ ein Unterschied von nur $+ 0''05$.

Die Correction $\triangle m$ gegen Bessel's Ableitung geht also überwiegend aus der veränderten Behandlung der Sternbewegungen und der verschiedenen Vertheilung der verglichenen Sterne hervor.

Der obige wahrscheinliche Fehler von $\triangle m$ mufs noch zusammengesetzt werden mit dem wahrscheinlichen Fehler der Struve'schen und der Bradley'schen Aequinoctial-Bestimmung, welchen

letzteren O. Struve (pag. 87) aus der Uebereinstimmung der einzelnen Bestimmungen von 1753—1760 zu 0,"585 ableitet, eine Zahl, aus der sich deutlich die Schätzung der Unsicherheit ergiebt, mit der alle Ermittelungen von m gegenwärtig noch behaftet sind.

Leitet man aus den Struve'schen Correctionen $\triangle m$ und $\triangle n$ unter unveränderter Annahme des Bessel'schen λ die Correction $\triangle \frac{d\psi}{dt}$ für die Bessel'sche Lunisolar-Präcession für 1790 ab, so erhält man die beiden Werthe:

$$\text{aus } \triangle m \qquad \triangle \cdot \frac{d\psi}{dt} = +0,''0166$$

$$\text{aus } \triangle n \qquad \triangle \cdot \frac{d\psi}{dt} = +0,''0094.$$

Struve leitet daraus nach den Gewichten beider Bestimmungen ab:

$$\triangle \cdot \frac{d\psi}{dt}(1790) = +0,''01386$$

Bessel hat für 1790,0

$$\frac{d\psi}{dt} = 50,36598,$$

also Struve für 1790,0

$$\frac{d\psi}{dt} = 50,37984.$$

Der Unterschied der beiden Werthe von $\triangle \cdot \frac{d\psi}{dt}$ würde viel gröfser geworden sein ohne die Berücksichtigung der Eigenbewegung des Sonnen-Systems, man würde dann die beiden unzulässig differirenden Werthe gefunden haben:

$$\triangle \cdot \frac{d\psi}{dt} = +0,''0213$$

$$\triangle \cdot \frac{d\psi}{dt} = -0,''0101.$$

Diese Resultate gestalten sich nun aber für die Lunisolar-Präcession merklich anders, wenn man bei der Berechnung von

$\triangle \cdot \frac{d\psi}{dt}$ aus $\triangle m$ nicht den Bessel'schen Werth von $\frac{d\lambda}{dt}$ für 1790, sondern einen verbesserten aus den neueren Bestimmungen hervorgehenden anwendet. Eigentlich hat man:

$$\triangle \cdot \frac{d\psi}{dt} = \left\{ \triangle m + \triangle \frac{d\lambda}{dt} \right\} \text{Sec } \omega_0$$

$$\triangle \cdot \frac{d\psi}{dt} = \triangle n \text{ Cosec } \omega_0.$$

Auf die Fundamental-Epoche 1750 bezogen, werden die Annahmen für $\frac{d\lambda}{dt}$:

nach Peters	$0''16071 - 0''048372 \cdot \frac{t}{100}$
nach Hansen	$0{,}15449 - 0{,}047718 \cdot \frac{t}{100}$
nach Lehmann	$0{,}15689 - 0{,}048022 \cdot \frac{t}{100}$
nach Le Verrier	$0{,}16695 - 0{,}048336 \cdot \frac{t}{100}$

Man hat also für Bessel's Werth $\frac{d\lambda}{dt}$ (1790,0) $= 0''15798$ mit Eintragung von $t = 40$ die Correctionen:

nach Peters	$\triangle \cdot \frac{d\lambda}{dt} = -0''0166$,	daraus $\triangle \cdot \frac{d\psi}{dt} = -0''0015$
nach Hansen	$= -0{,}0226$ „	$= -0{,}0080$ „
nach Lehmann	$= -0{,}0203$ „	$= -0{,}0055$ „
nach Le Verrier	$= -0{,}0104$ „	$= +0{,}0052$ „

Aus $\triangle m$ folgt also mit den genaueren $\frac{d\lambda}{dt}$ für $\triangle \cdot \frac{d\psi}{dt}$ im Mittel $-0''0025$.

Verbindet man die einzelnen verbesserten $\triangle \cdot \frac{d\psi}{dt}$ mit dem oben aus $\triangle n$ bestimmten $\triangle \cdot \frac{d\psi}{dt} = +0''0094$ nach den Gewichten der Bestimmungen von $\triangle m$ Sec ω_0 und $\triangle n$ Cosec ω_0 (welche sich

nach O. Struve pag. 87 umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Fehler 0″,67 und 0″,86), so ergiebt sich für $\frac{d\psi}{dt}$ pro 1790,0 folgende Reihe von Werthen:

nach Struve und Peters = 50″,36850
nach „ und Hansen = 50,36465
nach „ und Lehmann = 50,36611
nach „ und Le Verrier = 50,37277.

Diese Werthe reducirt auf 1750,0 mit dem Ausdrucke

$$2w\,(1750{,}0 - 1790{,}0)$$

wobei das jedem der obigen Systeme zugehörige w (pag. 23) angewandt werden kann, geben dann den gesuchten Coefficienten f.

Wir finden dafür der Reihe nach $f = 50''{,}3772$
$= 50{,}3732$
$= 50{,}3747$
$= 50{,}3815$
} 1750,0

Zur Uebertragung dieser Coefficienten-Werthe auf das Fundamental-System 1800,0 und 1850,0 würden die Transformations-Ausdrücke $+0''{,}002478$ und $+0''{,}004955$ dienen müssen.

Man hätte damit z. B. für 1800,0

nach Peters $\psi = 50''{,}3797\,t - 0''{,}0001084\,t^2 \ldots$
nach Lehmann $\psi = 50{,}3772\,t - 0{,}0001080\,t^2 \ldots$

welche Werthe von f mit den von Peters und Lehmann selbst directer abgeleiteten innerhalb der Genauigkeit unserer Rechnung übereinkommen.

Direct wird man nämlich f für irgend ein Fundamental-System finden, wenn man die von Struve für 1790 gefundenen Werthe von m und n, 46″,0557 und 20″,0643 mit dem im selbigen System gültigen und pro 1790 berechneten $\frac{d\lambda}{dt}$ und dem zur selbigen Fundamental-Epoche gehörigen ω_0 verbindet und dann $\frac{d\psi}{dt}$ mit $+2w$ $(T - 1790{,}0)$ auf die Epoche bringt.

Auf solche Weise haben Peters (Num. const. nut. pag. 70ff.) und Lehmann A. N. Nr. 1619 für 1800,0 gefunden:

$$\psi = 50''{,}3798\, t - 0''{,}0001084\, t^2 \ldots.$$
$$\psi = 50{,}3771\, t - 0{,}0001080\, t^2 \ldots.$$

Hansen hat für die Lunisolar-Präcession und die allgemeine Präcession in Länge folgende Ausdrücke auf die Epoche 1800,0 bezogen:

$$\psi = 50''{,}35593\, t - 0''{,}00010674\, t^2 \ldots.$$
$$P = 50{,}22295\, t + 0{,}00011207\, t^2 \ldots.$$

Nach der Angabe in der Einleitung der Sonnentafeln ist dieser Werth aus Bessel's Untersuchung über die Lunisolar-Präcession abgeleitet. Man findet Hansen's Werth nahe wieder, wenn Bessel's Werthe für m_0 und n_0 (1777,5) mit Hansen's $\frac{d\lambda}{dt}$ (1777,5) verbunden, die Gewichte der beiden Zahlen für $\frac{d\psi}{dt}$ dann nach einem ähnlichen Verfahren wie A. N. Nr. 92 berücksichtigt und Hansen's Säcularänderungen zur Uebertragung auf 1800 angewandt werden.

Die von Le Verrier (Annales II. pag. 173) angenommene Lunisolar-Präcession für die Fundamental-Epoche 1850,0 hat den Ausdruck:

$$\psi = 50''{,}37140\ t - 0''{,}00010881\ t^2 \ldots.$$

Sie beruht auf der oben angeführten Annahme von Le Verrier für λ und auf folgendem Ausdruck für die Präcession in Länge:

$$P = 50''{,}23572\ t + 0''{,}00011289\ t^2 \ldots.$$

Der Coefficient 50″,23572 ist genau das Bessel'sche Resultat für $\frac{dP}{dt}$ pro 1850,0, ein Resultat, welches in Folge der Unvollkommenheiten in Bessel's λ und in seinen Säcularänderungen etwas weniger genau ist, als die m_0 und n_0 Bessel's für 1777,5, welche von Hansen benutzt sind. —

Wir wollen zum Schlusse dieser Erörterungen die Ausdrücke für m und n zusammenstellen, welche aus den im Vorhergehenden

erläuterten Untersuchungen hervorgegangen sind und allgemeinere Anwendung gefunden haben:

Nach Bessel:

$$m = 46''{,}0437 + 0''{,}03086\left(\frac{t-1800}{100}\right) \quad n = 20''{,}0596 - 0''{,}00970\left(\frac{t-1800}{100}\right)$$

Nach Bessel und Hansen:

$$m = 46{,}0467 + 0{,}02814\left(\frac{t-1800}{100}\right) \quad n = 20{,}0512 - 0{,}00850\left(\frac{t-1800}{100}\right)$$

Nach Bessel und Le Verrier:

$$m = 46{,}0459 + 0{,}02837\left(\frac{t-1800}{100}\right) \quad n = 20{,}0567 - 0{,}00866\left(\frac{t-1800}{100}\right)$$

Nach Struve und Peters:

$$m = 46{,}0623 + 0{,}02849\left(\frac{t-1800}{100}\right) \quad n = 20{,}0607 - 0{,}00863\left(\frac{t-1800}{100}\right)$$

Die Zeiteinheit, für welche wir im Eingange dieses Aufsatzes bei der Bestimmung der Bewegung der Ecliptik mit Laplace das julianische Jahr angenommen haben, ist bei Struve's Untersuchungen über die Lunisolar-Präcession (nach Peter's Zeugnisse Num. const. nut. pag. 37) das tropische Jahr, bei Bessel ist mir eine bestimmte Angabe darüber bisher nicht zu Gesicht gekommen*).

Hansen und Le Verrier nehmen durchgängig das Julianische Jahr als Einheit.

Sobald man die mittleren Stern-Oerter stets auf den Anfang des annus fictus reducirt, wird das tropische Jahr trotz seiner Veränderlichkeit als Einheit für die Ausdrücke, die die Veränderung der Stern-Oerter bestimmen, vorzuziehen sein. Die Reduction von dem Julianischen auf das gegenwärtige tropische Jahr beträgt übrigens in m . . . $-0''{,}000981$, in n . . . $-0''{,}000427$.

Für die Lunisolar-Präcession existirt endlich noch eine Bestimmung von Maedler (Dorpater Beobb. XIV. pag. 9 ff.).

Dieselbe vervollständigt eigentlich nur die Bestimmung von m durch die Vergleichung des um $-0''{,}42$ corrigirten (oder auf

*) Siehe jedoch die Mittheilung im II. Abschnitte dieser Darlegungen, wonach Bessel das julianische Jahr zu Grunde gelegt hat.

die neue Nutation bezogenen) Struve'schen Aequinoctiums 1825 mit dem um $-0''{,}31$ corrigirten Bradley'schen Aequinoctium; denn wenn man für die sämmtlichen andern Rectascensions-Bestimmungen, welche sich bis 1853 ausdehnen, durch Uebertragung von Struve — Bradley auf ihre Epoche im Mittel aus einer gröfseren Anzahl von Sternen constante Correctionen gegen Struve bestimmt und anbringt, wie Maedler gethan, so erreicht man nichts anderes, als dieselben auf das durch Struve—Bradley bestimmte Präcessions-System zu reduciren, ähnlich wie Bessel mit Piazzi verfahren ist.

Für die Ermittelung individueller Bewegungen der Sterne ist die Aufsuchung und Anbringung constanter Differenzen von Wichtigkeit, doch führt sie bei Ermittelung genereller Bewegungen leicht vom Ziele ab.

Was Maedler pag. 10 über die bequeme und vollständige Elimination der Bewegung unseres Sonnensystems aus der Präcessions-Bestimmung vermittelst ebenmäfsiger cyklischer Summirung sagt, bedarf der Ergänzung, denn es wird dazu nicht blofs die gleichmäfsige Vertheilung der Zahl der verglichenen Sterne, sondern auch der Quantität ihrer parallactischen Eigenbewegungen, die von den Entfernungen abhängt, erfordert.

Könnte man durch solche cyklische Summirung im Mittel die Eigenbewegungen in Rectascension aufheben, und wäre ein solches cyklisches Mittel der Rectascensions-Differenzen zweier Cataloge, deren Epochen T und T_1 seien, $= \frac{\Sigma(\alpha_1 - \alpha)}{n_1}$, so würde dasselbe nur die Differenz der Fehler beider Aequinoctial-Bestimmungen und das wahre $m_0\ (T_1 - T)$ enthalten, und die Bestimmung der Eigenbewegungen würde wesentlich auf die Bestimmung von blofsen Rectascensions-Differenzen (frei von m_0 und von den Fehlern der Aequinoctien) reducirt sein, wenn man für die Vergleichung je zweier Cataloge stets die zugehörigen constanten Differenzen $\frac{\Sigma(\alpha_1 - \alpha)}{n_1}$, $\frac{\Sigma(\alpha_2 - \alpha)}{n_2}$ etc. berücksichtigte.

Nimmt man aber eine solche Differenz zweier bestimmten Cataloge $\frac{\Sigma(\alpha_1 - \alpha)}{n_1}$ ohne Rücksicht auf die constanten Fehler der beiden Systeme als das Maafs der der Zeit folgenden Veränderungen der constanten Differenzen oder des Werthes m und reducirt man die ähnlichen Differenzen anderer Cataloge z. B. $\frac{\Sigma(\alpha_2 - \alpha)}{n_2}$ stets auf die resp. Differenz $\frac{(T_2 - T)}{T_1 - T} \times \frac{\Sigma(\alpha_1 - \alpha)}{n_1}$, so erhält man stets nur den einen Werth von m, welcher der Differenz

$$\frac{\Sigma(\alpha_1 - \alpha)}{n_1} \cdot \frac{1}{(T_1 - T)}$$

entspricht, anstatt bei unmittelbarer Benutzung der sämmtlichen einzelnen $\frac{\Sigma(\alpha_2 - \alpha)}{n_2}$, $\frac{\Sigma(\alpha_3 - \alpha)}{n_3}$ etc. auch die Fehler der Aequinoctial-Bestimmungen verschiedener Cataloge sich möglichst aufheben zu lassen. —

Dafs Maedler bei seinem Verfahren den Bessel'schen Werth von m nahe wiederfinden mufste, ist erklärlich; denn wie wir oben (pag. 26) gezeigt haben, ist die Differenz der Bessel'schen Aequinoctien mit (Bradley $- 0''{,}5$) und des für Nutation corrigirten Struve'schen mit dem ebenso corrigirten Bradley nur um $- 0''{,}05$ verschieden.

Maedler fand wahrscheinlich in Folge der gröfseren Zahl von Bradleyschen Sternen, die er eben so wie Bessel verglich, jene Uebereinstimmung der beiden Differenzen der Aequinoctien, die bei O. Struve's Ableitung nicht hervortritt, wieder, ohne dafs man daraus für die Realität der Besselschen Bestimmung von m eine ansehnliche Verstärkung erhält.

Eine Benutzung neuerer Fundamental-Bestimmungen ohne Zurückdatirung durch constante Differenzen thut deshalb Noth.

II.

Nachdem ich in dem ersten Abschnitt die Saecular-Bewegung der Ecliptik und die Praecession betrachtet habe, will ich jetzt in ähnlicher Weise die für die Nutation aufgestellten Formen und Zahlen-Werthe einer übersichtlichen und gedrängten Diskussion unterziehen und einige Hülfsmittel zur Verbesserung der älteren Nutations-Berechnungen hinzufügen.

Vorher jedoch sei es gestattet, einige Zusätze zu dem ersten Abschnitte zu besprechen, auf welche mich die wohlmeinende Kritik einiger Freunde des Jahrbuches aufmerksam gemacht, oder auf die mich die Vervollständigung der eigenen Untersuchungen inzwischen geführt hat. Herr Geheimrath Hansen hat bei Gelegenheit meiner Erörterung über Bessel's Bestimmung der Lunisolar-Praecession (pag. 21 ff.) mich darauf aufmerksam gemacht,*) dafs das von Bessel in den *Fund. astr.* pag. 289 ff. angewandte Verfahren theoretisch nicht durchweg zulässig sei, so dafs eigentlich eine Wiederholung jener Rechnungen geboten erscheine.

In der That läfst sich bei schärferer Betrachtung nicht verkennen, dafs das Verfahren, welches nach pag. 289 und 292 der *Fund.* bei der Ableitung von m und n aus den Rectascensions-Aenderungen der Sterne zur Anwendung gekommen ist, einem erheblichen Einwurf unterliegt. Erwägt man die bekannten Formen von m und n:

$$m = \frac{d\psi}{dt} \operatorname{Cos} \omega - \frac{d\lambda}{dt}$$

$$n = \frac{d\psi}{dt} \operatorname{Sin} \omega$$

so ist es einleuchtend, wenn man die Rectascensions-Aenderungen

---

*) Anmerkung. Siehe auch die Egeria-Tafeln pag. 448.

der Sterne oder die Integrale über $\frac{d\alpha}{dt} = m + n \operatorname{Tg}\delta \operatorname{Sin}\alpha$ unter der Form:

$$\alpha' - \alpha = ax + by$$

aufstellt und dabei für die Integrationen die bekannten Näherungs-Ausdrücke durch die für die Mitte der Epochen geltenden $\frac{d\psi_0}{dt}$ und $\frac{d\lambda_0}{dt}$ etc. und die Zwischenzeiten anwendet, dafs dann bei der Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate nicht m_0 und n_0 als die Unbekannten x und y eingeführt werden dürfen, wie bei Bessel geschehen, sondern dafs als unabhängige Unbekannte $\frac{d\lambda_0}{dt} = x$ und $\frac{d\psi_0}{dt} = y$ bei dieser Lösung auftreten müssen.

Man wird also, da die Bestimmung von $\frac{d\lambda_0}{dt}$ sich hierbei ganz mit den Fehlern der beiden Aequinoctien vermischen würde und defshalb angemessener aus der Theorie der saecularen Störungen der Erdbewegung entlehnt wird, aus den Rectascensions-Aenderungen der Sterne den Werth nur einer Unbekannten $\frac{d\psi_0}{dt}$ erhalten, die man der Durchsichtigkeit der späteren Verbesserungen wegen zunächst als Funktion von $\frac{d\lambda_0}{dt}$ aufstellen kann.

Der so zu findende Werth von $\frac{d\psi_0}{dt}$ ist aber nicht identisch mit einem nach den Gewichten genommenen Mittel aus den getrennten Bestimmungen Bessel's nach den beiden verschiedenen Formen, in denen jene Unbekannte in den Rectascensions-Aenderungen auftritt.

Herr Prof. Moeller in Lund bemerkt ferner zu pag. 31, dafs sich in der That eine bestimmte Angabe von Bessel über die Zeit-Einheit, die seinen Praecessions-Ausdrücken zu Grunde liegt, in den Astr. Nachr. Bd. 6 pag. 264 vorfindet. Dieselbe ist danach das julianische Jahr.

Bei Gelegenheit dieser letzteren Berichtigung bin ich selbst noch auf eine Stelle in einer Abhandlung von Poisson aufmerksam geworden, in welcher eine Berechnung der Saecular-Bewegung der Ecliptik enthalten ist, auf die ich zur Vervollständigung des im ersten Abschnitt gegebenen hier noch verweisen will. Dieselbe befindet sich in Poisson's Abhandlung *„sur le mouvement de la terre autour de son centre de gravité (Mémoires de l'Académie des Sciences* T. 7. 1827 pag. 254), enthält aber nur das Resultat einer von Bouvard (übrigens fehlerhaft) ausgeführten Eintragung neuerer Massen-Werthe (nach der 5. Edition der *Exposition du système du monde*) in die allgemeinen Ausdrücke des 6. Buches der *Mécanique céleste.*

Zur Nutation übergehend wollen wir zunächst die allgemeinen Formen der einzelnen unter diesem Namen zusammengefafsten Bewegungen der Erd-Axe nach den neuesten und erschöpfendsten Untersuchungen aufstellen, soweit sie innerhalb der Genauigkeits-Grenzen der gegenwärtigen Beobachtungskunst Berücksichtigung erfordern.

Man nennt bekanntlich „mittlere" Lage der Erd-Axe eine solche, welche aus der beobachteten wahren dadurch gefunden wird, dafs man von der augenblicklichen Phase der Bewegung der Axe in jeder der einzelnen superponirten Schwankungen von kürzerer als saecularer Periode den Uebergang auf den Nullpunkt, d. h. auf eine innerhalb jeder Oscillations-Richtung central gelegene Position, durch Rechnung vollzieht und die Summe dieser einzelnen Reductionen an die beobachtete Richtung der Axe anbringt.

Nennt man dann im Coordinaten-System der jedesmaligen Ecliptik den Unterschied: Länge des Poles der mittleren Axen-Lage weniger Länge des Poles der wahren Axen-Lage der Erde .... $\Delta\psi$ und den Unterschied: Breite des mittleren Poles weniger Breite des wahren Poles .... $\Delta\varepsilon$, so hat man:

$$\Delta\psi = L\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\mathrm{Cos}\ 2\,\varepsilon}{\mathrm{Sin}\ \varepsilon}\dfrac{J}{n}\,\mathrm{Sin}\ \Omega + \dfrac{\mathrm{Cos}\ \varepsilon\, J_2}{4\,n}\,\mathrm{Sin}\ 2\,\Omega \\ -\dfrac{\mathrm{Cos}\ \varepsilon}{2\,m_2}\,\mathrm{Sin}\ 2\,\mathbb{C}_0 + 3\,\dfrac{e_2\,\mathrm{Cos}\ \varepsilon}{m_2}\,\mathrm{Sin}\ (\mathbb{C}_0 - \Gamma^1) \end{array}\right\}$$

$$+ S\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\mathrm{Cos}\ \varepsilon}{2\,m_1}\,\mathrm{Sin}\ 2\,\odot + 3\,\dfrac{e_1\,\mathrm{Cos}\ \varepsilon}{m_1}\,\mathrm{Sin}\ (\odot - \Gamma) \\ -\dfrac{e_1\,\mathrm{Cos}\ \varepsilon}{2\,m_1}\,\mathrm{Sin}\ (\odot + \Gamma) \end{array}\right\}$$

$$\Delta\varepsilon = L\left\{\begin{array}{l} +\dfrac{\mathrm{Cos}\ \varepsilon\ J}{n}\,\mathrm{Cos}\ \Omega - \dfrac{\mathrm{Sin}\ \varepsilon\, J_2}{4n}\,\mathrm{Cos}\ 2\,\Omega \\ +\dfrac{\mathrm{Sin}\ \varepsilon}{2\,m_2}\,\mathrm{Cos}\ 2\,\mathbb{C}_0 \end{array}\right\}$$

$$+ S\left\{\dfrac{\mathrm{Sin}\ \varepsilon}{2\,m_1}\,\mathrm{Cos}\ 2\,\odot + \dfrac{e_1\,\mathrm{Sin}\ \varepsilon}{2\,m_1}\,\mathrm{Cos}\ (\odot + \Gamma)\right\}$$

In dieser Zusammenstellung sind alle Glieder enthalten, deren Coefficienten gröfser sind als 0″,05, nicht berücksichtigt alle Glieder von nahe monatlicher oder noch kürzerer Periode, deren Coefficient kleiner ist als 0″,05; von den andern Gliedern, deren Coefficient zwischen 0″,005 und 0″,05 liegt, sind dagegen diejenigen von jährlicher Periode mit aufgenommen, weil dieselben bei der feineren Bestimmung von Aberration und Parallaxe merklich einwirken können. Unter 0″,005 ist kein Coefficient mehr berücksichtigt worden.

Man wird, wie wir glauben, diese willkührlichen Grenzbestimmungen, die nun einmal zur Verständigung und zum Abschlufs erforderlich sind, im Allgemeinen als sachgemäfs zugeben. Uebrigens haben wir eine selbstständige Untersuchung über die Glieder, welche bei einer vollständigen Integration der Differential-Gleichungen der Nutation noch merklich werden können, nicht von Neuem durchgeführt, sondern uns bisher dabei der Zusammenstellung von Peters (*Numerus constans nutationis* pag. 46ff.) anvertraut und nur die Form der oben aufgestellten Ausdrücke durch direkte Entwickelung nochmals geprüft. — Die Bezeichnungen auf der rechten Seite der obigen Gleichungen haben folgende Bedeutung:

Es ist

$$L = \frac{3Kk_2^2}{4\pi s \cdot \mathrm{Sin}\ 1''}$$

$$S = \frac{3Kk_1^2}{4\pi s \cdot \mathrm{Sin}\ 1''}$$

Hierbei ist K (wie im Abschnitt I pag. 22) der bekannte von dem Verhältnisse der Hauptträgheitsmomente des Erdkörpers abhängige Ausdruck, k_2^2 die beschleunigende Kraft des Mondes, wobei der mittlere Sonnentag als Zeit-Einheit, die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde als Längen-Einheit gilt, k_1^2 die beschleunigende Kraft der Sonne, wobei dieselbe Zeit-Einheit, aber die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde als Längen-Einheit gilt, s das Verhältnifs des mittleren Sonnentages zum Sterntage. Ferner ist

ε die mittlere Schiefe der Ecliptik

$$J = \frac{\mathrm{Sin}\ i\ \mathrm{Cos}\ i\ E_2}{1 - \frac{3}{2}\ \mathrm{Sin}^2\ i}\ ^*)$$

$$J_2 = \frac{\mathrm{Sin}^2\ i \cdot E_2}{1 - \frac{3}{2}\ \mathrm{Sin}^2\ i}$$

i die Neigung der Mondbahn gegen die Ecliptik
e_1 die Excentricität der Erdbahn
e_2 die Excentricität der Mondbahn
Ω die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn
$\mathbb{C}_0$ die mittlere Länge des Mondes
$\odot$ die wahre Länge der Sonne
m_2 und m_1 die mittleren täglichen Veränderungen von $\mathbb{C}_0$ und $\odot$
Γ die geocentrische Länge des Perihels der Erdbahn
Γ' die Länge des Perigaeums in der Mondbahn
alle diese Längen gezählt vom mittleren Aequinoctium

$n = \frac{2\pi}{U}$ die aus der Umlaufszeit U der Knotenlinie der Mondbahn sich ergebende tägliche Veränderung der Knotenlänge ohne Rücksicht auf das Zeichen.

Anmerkung. Es kann auch im Abschnitt I pag. 22 genauer heifsen $\mathrm{Sin}^2 i$ statt $\mathrm{Tg}^2 i$. Wegen E_1 und E_2 siehe pag. 22.

Nach Peters sind die Zahlenwerthe der obigen Ausdrücke für 1870:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi = &- 17'' \cdot 256 \operatorname{Sin} \Omega + 0'' \cdot 207 \operatorname{Sin} 2\Omega \\
&- 0'' \cdot 204 \operatorname{Sin} 2\mathbb{C}_0 + 0'' \cdot 068 \operatorname{Sin} (\mathbb{C}_0 - \Gamma') \\
&- 1'' \cdot 269 \operatorname{Sin} 2\odot + 0'' \cdot 128 \operatorname{Sin} (\odot - \Gamma) \\
&\qquad\qquad - 0'' \cdot 021 \operatorname{Sin} (\odot + \Gamma) \\
\Delta\varepsilon = &+ 9'' \cdot 224 \operatorname{Cos} \Omega - 0'' \cdot 090 \operatorname{Cos} 2\Omega \\
&+ 0'' \cdot 089 \operatorname{Cos} 2\mathbb{C}_0 \\
&+ 0'' \cdot 551 \operatorname{Cos} 2\odot + 0'' \cdot 009 \operatorname{Cos} (\odot + \Gamma)
\end{aligned}$$

Die Coefficienten aller dieser Glieder, ausgenommen die mit Sin Ω und Cos Ω multiplicirten, können, sobald die Constante K bekannt ist, aus anderweitig ermittelten Werthen der übrigen Gröfsen vorläufig mit einer das Hunderttheil der Sekunde in allen Fällen sichernden Genauigkeit berechnet werden.

Hierzu können aufser der Praecessions-Constante Werthe der Mond-Masse dienen, die man aus den Beobachtungen der Fluthhöhen oder aus der Theorie der Erdbewegung ableitet.

Ob die Bestimmung der Coefficienten von Sin Ω und Cos Ω auf demselben Wege mit Vortheil erhalten werden kann, ist meines Wissens noch nicht vollgültig untersucht; direkter und durchsichtiger erhält man dieselbe aus den Coordinaten-Aenderungen der Sterne selbst und zwar unter Aufsuchung so günstiger Beobachtungs-Verhältnisse und Zusammenziehung einer so grofsen Zahl einzelner Messungs-Resultate, dafs die gefundenen Werthe der Coefficienten stark genug zur sicheren Anwendung für alle einzelnen Fälle werden, in denen sie wieder zur Correction der Sternbeobachtungen gebraucht werden.

Aus den so gefundenen Zahlenwerthen und der Praecessions-Constante kann man dann k_2^2 und K in folgender Weise bestimmen und zur genaueren Berechnung auch der kleineren Glieder verwenden:

Es sei gesetzt: $K = x$ und $k_2^2 = y$; ferner mögen A, E_1, E_2 in derselben Weise gebraucht werden, wie im ersten Abschnitt pag. 22, so hat man mit Hinzuziehung der Gleichung für den

Coefficienten f der Lunisolar-Praecession (l. c. des ersten Abschnittes) folgende Gleichungen, in denen mit $\Sigma d\psi$ und $\Sigma d\varepsilon$ die Summen der kleinen Glieder der Nutation bezeichnet sind, welche man hier im Voraus mit genügender Näherung in Rechnung bringen kann.

$$\Delta\psi = -\frac{3J}{4\pi s \cdot n \operatorname{Sin} 1''} \frac{\operatorname{Cos} 2\varepsilon}{\operatorname{Sin}\varepsilon} \operatorname{Sin}\Omega \cdot xy + \Sigma d\psi$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{3J}{4\pi s \cdot n \operatorname{Sin} 1''} \operatorname{Cos}\varepsilon \operatorname{Cos}\Omega \cdot xy + \Sigma d\varepsilon$$

$$f = \frac{3k_1^2 E_1 A}{4\pi s \cdot \operatorname{Sin} 1''} \cdot \operatorname{Cos}\omega_0 \cdot x + \frac{3E_2 A}{4\pi s \cdot \operatorname{Sin} 1''} \operatorname{Cos}\omega_0 \; xy$$

In der Regel stellt man nun die von $\Delta\psi$ und $\Delta\varepsilon$ abhängigen Aenderungen der Stern-Coordinaten als eine Funktion des Ausdruckes

$$\frac{3J \operatorname{Cos}\varepsilon}{4\pi s \cdot n \operatorname{Sin} 1''} xy = c$$

dar und nennt denselben vorzugsweise Constante der Nutation. Geeigneter wäre es $\frac{3J \cdot xy}{4\pi s \cdot n \operatorname{Sin} 1''} = C$ als die Constante einzuführen, weil dieselbe wenigstens im Laufe eines Jahrhunderts hinreichend constant, nämlich auch von den merklichen Veränderungen frei sein würde, welche in c noch durch die Veränderlichkeit von Cos ε hervorgebracht werden:

Man hat mit Einführung von c:

$$\Delta\psi = -2c \operatorname{Cotg} 2\varepsilon \cdot \operatorname{Sin}\Omega + \Sigma d\psi^*)$$
$$\Delta\varepsilon = c \operatorname{Cos}\Omega + \Sigma d\varepsilon$$

Sind nun α' und δ' die wahren, α und δ die mittleren Rectascensionen und Declinationen eines Sternes, so ist bekanntlich:

---

*) Anmerkung. Durch Einführung von $\Delta\varepsilon$ in den Ausdruck der Lunisolar-Praecession entsteht bei deren Integration ein periodisches Glied, welches die Form hat:

$$d \cdot \Delta\psi = \frac{cf \cdot \operatorname{Sin} 1''}{n A} \operatorname{Tang}\varepsilon \operatorname{Sin}\Omega$$
$$= 0'' \cdot 003 \operatorname{Sin}\Omega$$

Dasselbe ist oben vernachlässigt.

$$\alpha' - \alpha = \Delta\psi \operatorname{Cos}\varepsilon + \Delta\psi \cdot \operatorname{Sin}\varepsilon \cdot \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Tang}\delta - \Delta\varepsilon \cdot \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Tg}\delta$$
$$\delta' - \delta = \Delta\psi \operatorname{Sin}\varepsilon \operatorname{Cos}\alpha + \Delta\varepsilon \cdot \operatorname{Sin}\alpha$$

Man findet also die von c abhängigen Transformationen der Coordinaten:

$$\alpha' - \alpha = -c\frac{\operatorname{Cos}2\varepsilon}{\operatorname{Sin}\varepsilon}\left\{1+\operatorname{Tang}\varepsilon\cdot\operatorname{Tg}\delta\cdot\operatorname{Sin}\alpha\right\}\operatorname{Sin}\Omega - c\operatorname{Tg}\delta\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\Omega$$

$$\delta' - \delta = -c\cdot\left\{\frac{\operatorname{Cos}2\varepsilon}{\operatorname{Cos}\varepsilon}\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\Omega - \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\Omega\right\}$$

Hat man mit Hülfe dieser Gleichungen aus den beobachteten Veränderungen von wahren Rectascensionen oder Declinationen den Werth von c ermittelt, so kann man aus diesem in Verbindung mit dem Zahlenwerthe von f jetzt x und y bestimmen.

Wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{3}{4\pi\cdot s\operatorname{Sin}1''} = H$$
$$k_1^2 \cdot H \cdot E_1\, A \cdot \operatorname{Cos}\omega_0 = a$$
$$H \cdot E_2\, A \cdot \operatorname{Cos}\omega_0 = b$$
$$\frac{HJ\cdot\operatorname{Cos}\varepsilon}{n} = \gamma$$

so ergeben sich folgende einfache Relationen zur Bestimmung von x und y:

$$\left.\begin{aligned} c &= \gamma\cdot xy \\ f &= ax + bxy \end{aligned}\right\} G.$$

Für f wollen wir einen Werth annehmen, welchen man (bezogen auf die Fundamental-Epoche 1800,0) aus Bessel's Werthen von m und n, die für 1777,5 gelten, mit Hinzuziehung von Hansen's Ausdrücken für λ und für die Saecular-Aenderungen durch folgende Gleichung berechnet:

$$f = [46''{,}03400 + 0''\,15570]\operatorname{Cos}(23^\circ 27'\,54'') + 20''{,}06447\operatorname{Sin}[23^\circ 27'\,54'']$$
$$- 45\cdot 0''{,}0001067$$

Dies giebt:
$$f = 50''{,}355$$

Man stellt diese Form leicht her, wenn man mit Bessel gleiche Gewichte seiner Werthe m und n annimmt und die beiden daraus folgenden Werthe von f nach ihren resp. zu $\operatorname{Cos}^2\omega_0$ und $\operatorname{Sin}^2\omega_0$ proportionalen Gewichten verbindet.

Für c (1800,0) nehmen wir nach Peters an 9″,223.

Die zugehörige mittlere Schiefe ε ist dann übereinstimmend mit der festen ω_0 gleich 23° 27′ 54″ zu setzen.

Für die anderen in den Gleichungen G auftretenden Zahlenwerthe haben wir nach ihren früher erörterten Bedeutungen anzunehmen:

$$A = 365{,}25 \qquad \log k_1^2 \; 6{,}47116$$
$$E_1 = 1{,}00042 \qquad \log J \; 8{,}95272$$
$$E_2 = 0{,}99212 \qquad \log n \; 6{,}96578$$

Hieraus folgen die Gleichungen G:

$$9{,}223 = xy\,(6{,}64061)$$
$$50{,}355 = x\,(3{,}68760) + xy\,(7{,}21282)$$

wo die in den Parenthesen eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten bedeuten.

Die Werthe K und von $\log k_2^2$, die sich hieraus ergeben, sind

$$K = \frac{1}{306{,}09} \qquad \log k_2^2 = 6{,}81010$$

und damit (siehe pag. 38)

$$\log S = 8{,}67647 \qquad \log L = 9{,}01541$$

Aus k_2^2, der beschleunigenden Kraft des Mondes in seiner mittleren Entfernung von der Erde, kann man leicht sein Massen-Verhältnifs zur Erde entweder mit Hülfe der Pendel-Beobachtungen und der Mond-Parallaxe oder mit Hülfe der siderischen Umlaufszeit des Mondes ableiten und durch Verbindung beider bekanntlich aus der obigen Bestimmung von k_2^2 mittels der beobachteten Winkelbewegungen der Erdaxe sogar eine Controle für die beobachtete Mond-Parallaxe erlangen.

Es würde hier zu weit führen, in diese Untersuchungen einzugehen, und es wird noch vollständigerer Erwägungen, als bisher vorliegen, bedürfen, um zu entscheiden, auf welchem Wege der Ableitung und aus welcher Art von Beobachtungen man jede dieser einzelnen mit einander vielfach verbundenen Maafsbestimmungen am günstigsten erhält. — Ueber die Form von K, welche

streng genommen für die Wirkung des Mondes eine tiefer eingehende Entwickelung verlangt, siehe auch Poisson (l. c. und Peters *Num. const.* pag. 38 ff.

Wir wollen, nachdem durch die obigen Entwickelungen und Rechnungen wenigstens eine Uebersicht über den gegenwärtigen Zustand der Kenntnifs derjenigen Transformationen der Sternen-Coordinaten gegeben ist, welche durch die Nutation der Erd-Axe bedingt werden, über die früheren Annahmen sowohl der Formen des Ausdruckes als der Werthe einen Ueberblick geben und daraus einige Hülfsmittel zur bequemen Verbesserung der älteren Annahmen, die in vielen Reductionen von Beobachtungen verkörpert sind, herleiten.

Aus den Beobachtungen der Variationen von Rectascensionen und Declinationen der Sterne, insbesondere des Polarsternes und der Zenithsterne, sind seit Bradley, welcher bekanntlich durch Beobachtungen der letzteren Art die Nutation fand, deren Merklichkeit Newton bei seiner theoretischen Untersuchung der Bewegungen der Erdaxe entgangen war, folgende Werthe von c bestimmt worden, sämmtlich bezogen auf 1800,0:

1.	von Busch aus den Beobachtungen von Bradley am Zenithsektor	9″,232
2.	von Lindenau aus $R.A$ des Polarsternes	8,977
3.	von Brinkley aus Beobachtungen am Dubliner Vertikalkreise	9,25
4.	von Robinson aus Beobachtungen am Greenwicher Mauerkreise	9,239
5.	von Peters aus Dorpater $R.A$ des Polarsternes	9,216
6.	von Lundahl aus Dorpater Decl. des Polarsternes	9,236

Der von Peters angenommene End-Werth ist ein mit Rücksicht auf die wahrscheinlichen Fehler gezogenes Mittel aus den Werthen 1, 5 und 6.

Die genaue Reduction der Beobachtungen Bradley's durch Busch wurde erst 1838 veröffentlicht. In der zweiten Hälfte des

18. Jahrhunderts hat man defshalb meistens nur solche Werthe der Nutations-Constante benutzt, welche mit anderweitigen Bestimmungen der Mondmasse näherungsweise gefunden waren.

Aber auch die Form der Nutations-Ausdrücke blieb längere Zeit unentwickelt.

Bei den ersten Reductions-Tafeln für Aberration und Nutation, welche in der Connaissance des temps für 1760 erschienen und nach La Caille's Rechnung auf d'Alembert's Theorie des Nutations-Phänomens mit Annahme eines Bradley'schen Werthes $c = 9''$ gegründet waren, berücksichtigte man nur die mit Sin Ω und Cos Ω multiplicirten Glieder. Maskelyne leitete aus Bradley's Beobachtungen für c den Werth $9''{,}55$ ab. Laplace und Lambert fügten die von der doppelten Sonnenlänge abhängigen Glieder hinzu.

Der vollständige Ausdruck von Laplace enthält sogar, wenngleich ziemlich ungenau, die von $2\odot$ abhängigen Glieder. Erst Bessel berücksichtigte in den Fund. astr. pag. 127 ff. wenigstens in $\Delta\varepsilon$ das ebenso merkliche und wegen der Länge der Periode wichtigere Glied, welches mit Cos 2Ω multiplicirt ist; dagegen entging ihm damals das noch ansehnlichere mit Sin 2Ω multiplicirte Glied in $\Delta\psi$, welches er erst später (A. N. No. 34 und 83) seinen verbesserten Reductionsformeln, auf denen die Tab. Regiom. beruhen, einverleibte. Später wurde dasselbe Glied auch von Poisson, wenngleich fehlerhaft (l. c.) hinzugefügt. Erst von Peters wurde die ganze Entwickelung vollständiger behandelt.

Laplace hatte im 5. Buche der Méc. cel. aus der Präcession und einem Werthe der Mondmasse, den ihm die Fluthhöhen ergeben hatten, $c = 10''{,}06$, später $9''{,}65$ gefunden, während Zach aus dem Werth der Mondmasse, welcher nach Delambre's Sonnentafeln aus den Sonnen-Beobachtungen resultirte, den Werth $c = 9''{,}648$ herleitete; Delambre selbst fand dafür $9''{,}63$.

Den Werth von Zach $c = 9''{,}648$ hat auch Bessel in den *Fund. astr.* bei der Reduction von Bradley's Beobachtungen angewandt. In den Sonnentafeln von Hansen & Olufsen endlich ist der Werth der Nutations-Constante $9''{,}271$ angenommen, welcher

mit Bessel's Präcession unter Anwendung der in diesen Sonnentafeln aufgestellten Mondmasse gefunden ist.

Da man wohl annehmen kann, dafs nach der ersten Lacaille-schen Form keine Beobachtungen reducirt worden sind, bei welcher die Vernachlässigung der von $2\odot$ abhängigen Glieder von grofsem Gewicht wäre, so hat man es also bei der Aufgabe: die sämmtlichen von Bradley ab sorgfältig beobachteten Sternörter etc. nach einem und demselben Nutations-Systeme zu behandeln, aufser mit den Verbesserungen der Zahlenwerthe der Coefficienten noch mit drei verschiedenen Formen der Verbesserungen zu thun.

Die erste Form (auf die nach Laplace, Delambre und mit Zach's Tafeln ausgeführten Reductionen bezüglich) besteht in der Hinzufügung der beiden von 2Ω abhängigen und der die Exentricität der Erdbahn enthaltenden Glieder und in der Verbesserung der Coefficienten der andern. Die zweite (an die in den *Fund. astr.* gebrauchten Ausdrücke anzubringend) enthält die vorigen aufser dem von $\mathrm{Cos}\, 2\Omega$ abhängigen Gliede, die dritte, insbesondere auf das Reductions-System der *Tab. Regiom.* anzuwenden, enthält nur noch die mit der Excentricität der Erdbahn multiplicirten Glieder und die Verbesserungen der in den Tab. Reg. nach Lindenau angenommenen Coefficienten von $\mathrm{Sin}\, \Omega$ und $\mathrm{Cos}\, \Omega$.

Die Hinzufügung der in der obigen Formel (pag. 39) nach Peters enthaltenen kleinen Glieder von kurzer Periode wird nur bei der schärfsten Discussion besonderer Beobachtungs-Reihen erforderlich und rathsam sein.

Auch diejenigen Verbesserungs-Ausdrücke, welche durch die genauere Annahme der Coefficienten von $\mathrm{Sin}\, 2\odot$ und $\mathrm{Cos}\, 2\odot$ und durch die Aufnahme der mit e_1 multiplicirten merklichen Glieder bedingt werden, wird man bei ihrer Kleinheit einer speciellen Sorge in den Fällen überlassen können, wo ihre Einführung zweckmäfsig erscheint. Wir wollen von diesen Ausdrücken hier nur diejenigen aufstellen, welche an das Reductions-System der *Tabulae Regiomontanae* anzubringen sind:

$$d \cdot \Delta\psi = + 0''{,}067 \operatorname{Sin} 2\odot + 0''{,}128 \operatorname{Sin} (\odot - \Gamma) - 0''{,}021 \operatorname{Sin} (\odot + \Gamma) \ldots$$
$$d \cdot \Delta\varepsilon = - 0''{,}029 \operatorname{Cos} 2\odot + 0''{,}009 \operatorname{Cos} (\odot + \Gamma) \ldots$$

Das folgende Täfelchen giebt die Werthe dieser Ausdrücke mit dem Argumente: wahre Sonnen-Länge und zwar $d \cdot \Delta\psi$ für 1800 und 1900, bei $d \cdot \Delta\varepsilon$ findet keine merkliche Aenderung in diesem Zeitraum statt. Beide Werthe sind wegen ihres Einflusses auf die Parallaxen-Bestimmungen bis auf Tausendtheile der Secunde angesetzt.

$\odot$	$d \cdot \Delta\psi$		$d \cdot \Delta\varepsilon$	$\odot$	$d \cdot \Delta\psi$		$d \cdot \Delta\varepsilon$
	1800	1900			1800	1900	
°	"	"	"	°	"	"	"
0	+ 0,147	+ 0,146	— 0,028	180	— 0,147	— 0,146	— 0,030
10	+ 171	+ 171	— 24	190	— 125	— 125	— 030
20	+ 187	+ 188	— 18	200	— 101	— 102	— 26
30	+ 194	+ 195	— 9	210	— 78	— 79	— 21
40	+ 190	+ 192	+ 2	220	— 58	— 59	— 12
50	+ 174	+ 177	+ 13	230	— 42	— 44	— 3
60	+ 147	+ 149	+ 23	240	— 31	— 33	+ 7
70	+ 110	+ 112	+ 31	250	— 24	— 26	+ 13
80	+ 66	+ 69	+ 36	260	— 20	— 23	+ 18
90	+ 18	+ 21	+ 38	270	— 18	— 21	+ 20
100	— 31	— 28	+ 35	280	— 15	— 18	+ 19
110	— 76	— 74	+ 30	290	— 10	— 12	+ 14
120	— 116	— 114	+ 22	300	— 0	— 2	+ 8
130	— 147	— 144	+ 11	310	+ 15	+ 12	— 1
140	— 167	— 164	— 1	320	+ 35	+ 32	— 9
150	— 177	— 174	— 12	330	+ 61	+ 58	— 18
160	— 175	— 173	— 20	340	+ 89	+ 87	— 24
170	— 165	— 164	— 27	350	+ 119	+ 118	— 27
180	— 147	— 146	— 30	360	+ 147	+ 146	— 28

Man wird hiermit die Rectascensionen und Declinationen leicht nach dem Schema der $a\,A$, $b\,B \ldots$ verbessern können.

Es ist
$$d \cdot \Delta\psi = \Delta A \cdot f$$
$$d \cdot \Delta\varepsilon = \Delta B$$
zu setzen, wo f den bekannten Coefficienten der Lunisolar-Präcession bedeutet.

Für die von den Knotenlängen abhängigen Verbesserungen wollen wir schreiben:

$$d \cdot \Delta\psi = - 2\,\Delta c \cdot \operatorname{Cotg} 2\varepsilon \operatorname{Sin} \Omega + \Delta c_2 \operatorname{Cotg} \varepsilon \cdot \operatorname{Sin} 2\Omega$$
$$d \cdot \Delta\varepsilon = \Delta c \cdot \operatorname{Cos} \Omega - \Delta c_2 \cdot \operatorname{Cos} 2\Omega$$

Wir haben dabei $\frac{L \operatorname{Sin}\varepsilon \cdot J_2}{4n}$ mit c_2 bezeichnet. Für alle früheren Formen, in welchen die 2Ω enthaltenden Glieder ganz oder zum Theil weggelassen waren, ist $\Delta c_2 = +0''{,}090$ zu setzen, dagegen sind, wo dieselben überhaupt aufgenommen wurden, die Verbesserungen der Zahlenwerthe (ausgenommen bei der fehlerhaften, aber kaum irgendwo gebrauchten Bestimmung von Poisson) zu vernachlässigen.

Am Wichtigsten mufs gerade im Jahrbuche eine Aufstellung derjenigen Correctionen erscheinen, welche an die über 30 Jahre lang im Jahrbuch angenommene Nutations-Form der *Tab. Regiom.* anzubringen sind, und eine Hülfe für diejenigen Verbesserungen der Transformationen von Rectascensionen und Declinationen auf den wahren Aequator und das wahre Aequinoctium, welche mit den Reductionstafeln des Jahrbuches von 1830 bis 1860 berechnet worden sind.

Hierbei ist Δc_2 zu vernachlässigen und für Δc zu setzen $+0''{,}246$. Für die hiernach erforderlichen Verbesserungen von $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ wollen wir in Folgendem eine Hülfstafel aufstellen, die mit dem Werthe von ε für 1850 berechnet ist, aber natürlich auch bis 1750 noch hinreichende Gültigkeit haben wird.

Setzt man

$$-\frac{\operatorname{Cos} 2\varepsilon}{\operatorname{Sin}\varepsilon} \operatorname{Sin}\Omega = m$$

$$-\frac{\operatorname{Cos} 2\varepsilon}{\operatorname{Cos}\varepsilon} \operatorname{Sin}\Omega = n \operatorname{Cos} N$$

$$-\operatorname{Cos}\Omega = n \operatorname{Sin} N$$

so wird nach pag. 41 leicht gefunden:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = m\,\Delta c + n\,\Delta c \operatorname{Sin}(\alpha + N) \operatorname{Tg}\delta$$

$$\Delta(\delta' - \delta) = n\,\Delta c \operatorname{Cos}(\alpha + N).$$

Man kann nun m, n und N mit dem Argument Ω in eine Tafel bringen und damit die Verbesserungen der Transformationen von α und δ für jede beliebige Epoche mit dem zugehörigen Ω leicht berechnen.

Folgende Tafel giebt für $\Delta c = +0''{,}246$ die Werthe von $m\Delta c$, $\log n\Delta c$ und N für jeden zehnten Grad von Ω:

Verbesserungs-Tafel für die Rectascensionen und Declinationen.

$$\triangle c = + 0''{,}246$$

Ω	$m \cdot \Delta c$		$\log n \cdot \Delta c$		N	
°	″				°	
0	— 0,00		9,391		270,0	
		7		3		7,5
10	— 0,07		9,388		262,5	
		7		9		7,7
20	— 0,14		9,379		254,8	
		7		14		8,1
30	— 0,21		9,365		246,7	
		6		18		8,7
40	— 0,27		9,347		238,0	
		5		22		9,6
50	— 0,32		9,325		228,4	
		5		22		10,6
60	— 0,37		9,303		217,8	
		3		20		11,7
70	— 0,40		9,283		206,1	
		2		15		12,8
80	— 0,42		9,268		193,3	
		0		5		13,3
90	— 0,42		9,263		180,0	
		0		5		13,3
100	— 0,42		9,268		166,7	
		2		15		12,8
110	— 0,40		9,283		153,9	
		3		20		11,7
120	— 0,37		9,303		142,2	
		5		22		10,6
130	— 0,32		9,325		131,6	
		5		22		9,6
140	— 0,27		9,347		122,0	
		6		18		8,7
150	— 0,21		9,365		113,3	
		7		14		8,1
160	— 0,14		9,379		105,2	
		7		9		7,7
170	— 0,07		9,388		97,5	
		7		3		7,5
180	0,00		9,391		90,0	
		7		3		7,5
190	+ 0,07		9,388		82,5	
		7		9		7,7
200	+ 0,14		9,379		74,8	
		7		14		8,1
210	+ 0,21		9,365		66,7	
		6		18		8,7
220	+ 0,27		9,347		58,0	
		5		22		9,6
230	+ 0,32		9,325		48,4	
		5		22		10,6
240	+ 0,37		9,303		37,8	
		3		20		11,7
250	+ 0,40		9,283		26,1	
		2		15		12,8
260	+ 0,42		9,268		13,3	
		0		5		13,3
270	+ 0,42		9,263		0,0	
		0		5		13,3
280	+ 0,42		9,268		346,7	
		2		15		12,8
290	+ 0,40		9,283		333,9	
		3		20		11,7
300	+ 0,37		9,303		322,2	
		5		22		10,6
310	+ 0,32		9,325		311,6	
		5		22		9,6
320	+ 0,27		9,347		302,0	
		6		18		8,7
330	+ 0,21		9,365		293,3	
		7		14		8,1
340	+ 0,14		9,379		285,2	
		7		9		7,7
350	+ 0,07		9,388		277,5	
		7		3		7,5
360	0,00		9,391		270,0	

Auf diese Tafel folgt eine Zusammenstellung der Werthe von Ω zwischen 1750 und 1870, welche zur Bildung des Argumentes der ersten Tafel für jede Epoche innerhalb dieses Zeitraums dienen kann. Die Werthe der Knotenlänge sind darin nach den Angaben von Hansen's Mondtafeln angesetzt:

Tafel für die Argumente Ω.

Epoche: annus fictus.

Jahr	Ω	Jahr	Ω	Jahr	Ω
	°		°		°
1750	280,32	1790	226,68	1830	173,04
1751	260,98	1791	207,34	1831	153,70
1752	241,64	1792	188,00	1832	134,36
1753	222,30	1793	168,66	1833	115,02
1754	202,96	1794	149,32	1834	95,68
1755	183,61	1795	129,97	1835	76,33
1756	164,27	1796	110,63	1836	56,99
1757	144,93	1797	91,29	1837	37,65
1758	125,59	1798	71,95	1838	18,31
1759	106,25	1799	52,61	1839	358,97
1760	86,91	1800	33,27	1840	339,63
1761	67,57	1801	13,93	1841	320,29
1762	48,23	1802	354,59	1842	300,95
1763	28,89	1803	335,25	1843	281,61
1764	9,55	1804	315,91	1844	262,27
1765	350,20	1805	296,56	1845	242,92
1766	330,86	1806	277,22	1846	223,58
1767	311,52	1807	257,88	1847	204,24
1768	292,18	1808	238,54	1848	184,90
1769	272,84	1809	219,20	1849	165,56
1770	253,50	1810	199,86	1850	146,22
1771	234,16	1811	180,52	1851	126,88
1772	214,82	1812	161,18	1852	107,54
1773	195,48	1813	141,84	1853	88,20
1774	176,14	1814	122,50	1854	68,86
1775	156,79	1815	103,15	1855	49,51
1776	137,45	1816	83,81	1856	30,17
1777	118,11	1817	64,47	1857	10,83
1778	98,77	1818	45,13	1858	351,49
1779	79,43	1819	25,79	1859	332,15
1780	60,09	1820	6,45	1860	312,81
1781	40,75	1821	347,11	1861	293,47
1782	21,41	1822	327,77	1862	274,13
1783	2,07	1823	308,43	1863	254,79
1784	342,73	1824	289,09	1864	235,45
1785	323,38	1825	269,74	1865	216,10
1786	304,04	1826	250,40	1866	196,76
1787	284,70	1827	231,06	1867	177,42
1788	265,36	1828	211,72	1868	158,08
1789	246,02	1829	192,38	1869	138,74

Zur Theorie des Durchgangs-Instrumentes.

I.

In der allgemeinsten Weise ist das Durchgangs-Instrument bekanntlich wie ein Theil eines Aequatorials zu betrachten, dessen erste oder Haupt-Axe die Rotations-Axe der Erde selbst ist.

Die unmittelbare Dreh-Axe des Durchgangs-Instruments bildet die zweite Axe dieses Aequatorials.

Nach den verschiedenen Stellungen der zweiten zur ersten Axe dient das ganze Instrument zu verschiedenen Arten von Coordinaten-Bestimmungen, deren gemeinsame Grundlage die durch Zeitmessungen zu erlangende Kenntnifs der Drehungswinkel der Erde um ihre Axe ist.

Steht die Dreh-Axe des Durchgangs-Instrumentes normal zur Erd-Axe, so dient das Instrument durch Messung der Zeitintervalle zwischen den Durchgangs-Epochen ausschliefslich zur Bestimmung von Rectascensions-Unterschieden.

Bei jedem andern Neigungswinkel der Dreh-Axe des Durchgangs-Instrumentes gegen die Erd-Axe kann man mittelst desselben durch blofse Zeitmessungen nicht nur Unterschiede der Rectascensionen, sondern auch Unterschiede zwischen den Poldistanzen von Himmelsobjecten und jenem Neigungswinkel der Axen ermitteln, somit überhaupt Unterschiede von Poldistanzen bestimmen, wenngleich mit Einschränkungen, welche näher zu erörtern sind.

Von den vielen möglichen Fällen dieser Anwendungen des Durchgangs-Instrumentes hat man bisher, unter Wahrung des grofsen praktischen Vortheils einer nahezu horizontalen Lage der unmittelbaren Dreh-Axe des Instrumentes, in der Regel nur zwei Gruppen verwerthet:

1) Neigungswinkel der Dreh-Axe des Durchgangs-Instrumentes gegen die Erd-Axe nahe gleich 90° (Durchgänge durch den Meridian);
2) Neigungswinkel der Dreh-Axe des Durchgangs-Instrumentes gegen die Erd-Axe nahe gleich der Polhöhe des Beobachtungsortes (Durchgänge durch den Ost-West-Vertical).

Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob nicht — immer mit Erhaltung der nahezu horizontalen Lage der unmittelbaren Dreh-Axe des Instrumentes — auch bei allen Zwischenwerthen jenes Neigungswinkels zwischen 90° und der Polhöhe φ noch brauchbare Bestimmungen der Unterschiede von Poldistanzen auf der Grundlage blofser Zeitmessungen geliefert werden können, und zwar in merklich weiteren Grenzen, als bei obigen Einschränkungen möglich ist.

Man wird zugeben, dafs es in Betracht des Einflusses der Biegungen und Theilungsfehler, sowie der Mangel unserer Kenntnifs der Refractionen nicht ohne Bedeutung sein würde, wenn es gelänge, die Grenzen, innerhalb deren Differenzen von Poldistanzen durch blofse Zeitmessungen gänzlich frei von obigen Fehlerquellen bestimmbar sind, mit Erhaltung hinreichend günstiger sonstiger Genauigkeitsverhältnisse, wesentlich zu erweitern.

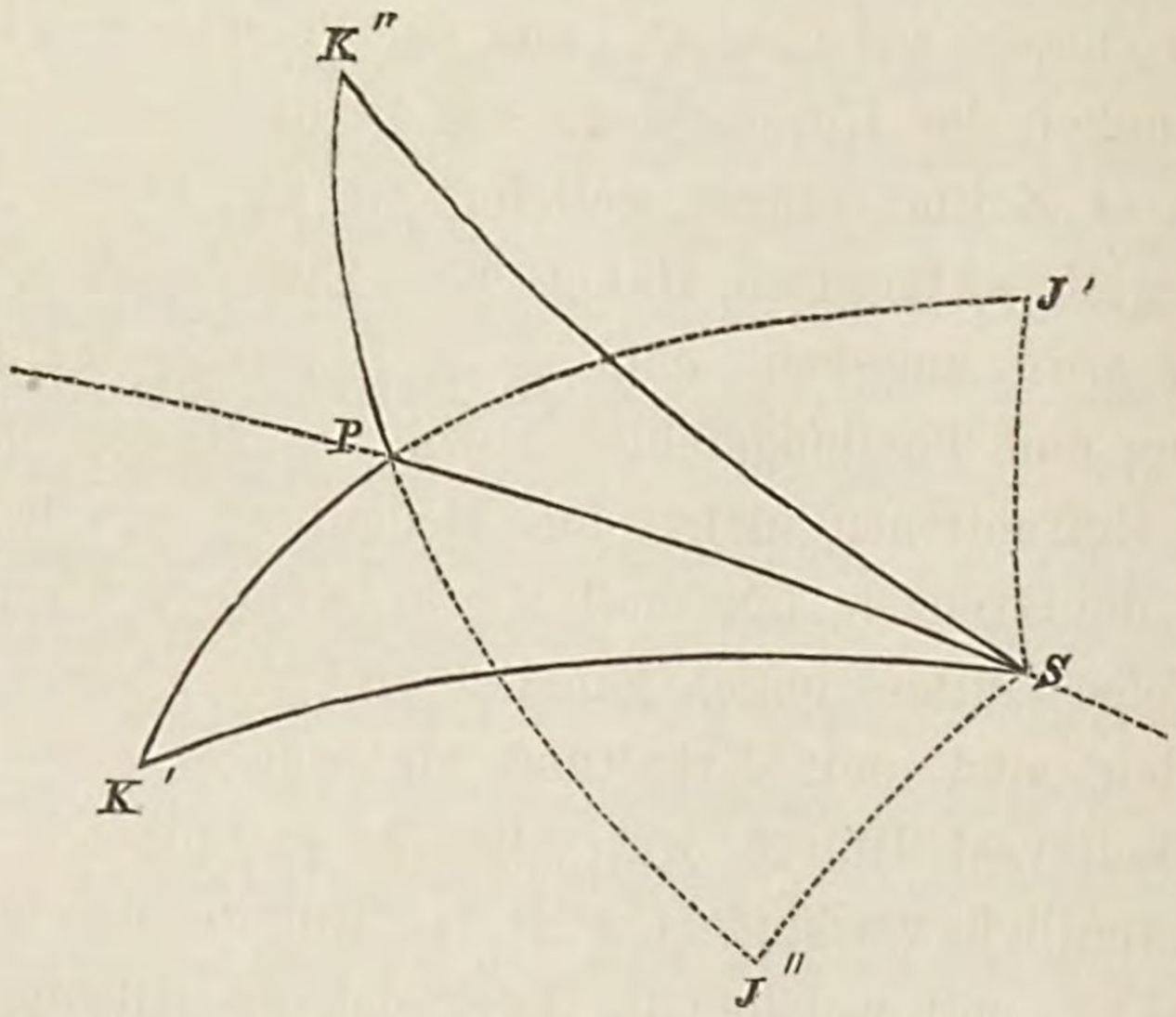
Bekanntlich vermindert sich der Einfluſs der stärkeren Pointirungsfehler, mit welchen im Vergleich zu mikrometrischen Einstellungen die Durchgangsbeobachtungen, somit auch alle aus Zeitmessungen hervorgehenden Winkelmessungen, im Allgemeinen behaftet sind, gerade bei zweckmäfsig angeordneten Herleitungen der Differenzen von Poldistanzen aus Zeitmessungen in solchem Maafse, dafs hierbei eine wahrhaft mikrometrische Schärfe des Pointirungs-Resultates erreichbar wird.

Schliefslich dürfte die gröfsere Allgemeinheit der Behandlung der Aufgaben des Durchgangs-Instrumentes, wie sie in den nachfolgenden Darlegungen versucht wird, nicht werthlos sein, auch wenn dieselben nicht zu Anwendungen führen sollten, welche wesentliche Vorzüge vor andern bisherigen Beobachtungsmethoden hätten.

In beistehender Figur bezeichnet:

P den Punkt, in welchem die Verlängerung der Erd-Axe
K den Punkt, in welchem die Verlängerung eines bestimmten Endes der Dreh-Axe des Durchgangs-Instrumentes
S den Punkt (das beobachtete Gestirn), in welchem die Verlängerung des Objectiv-Endes der optischen Axe des Instrumentes

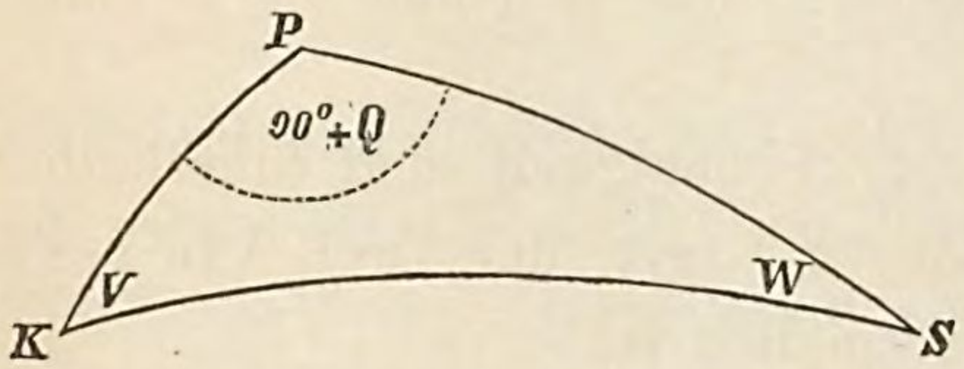
} die Himmelskugel trifft.



Im Allgemeinen kann ein Punkt S mittelst eines solchen Instrumentes in zwei verschiedenen Lagen der unmittelbaren Dreh-Axe der Visirlinie, also hier bei zwei verschiedenen Positionen von K, zur Einstellung gelangen. Die beiden Positionen von K, in welchen nach den in der Figur enthaltenen Annahmen diese beiden Einstellungen auf S stattfinden können, sind mit K' und K'' bezeichnet. Aus dem halben Rectascensions-Unterschiede von K' und K'', d. h. aus dem halben Sternzeit-Unterschiede von zwei aufeinanderfolgenden Einstellungen in beiden Lagen des Durchgangs-Instrumentes auf den Fixstern S (Obere und untere Culmination bei dem Durchgangs-Instrument im Meridian, Ost- und Westdurchgang bei dem Durchgangs-Instrument im ersten Vertical)

kann man jeden der beiden gleichen Winkel $K' P S$ und $K'' P S$, welche wir mit $90° + Q$ bezeichnen wollen, ermitteln. Der Sternzeit-Unterschied zweier solcher aufeinanderfolgenden Durchgänge beträgt nämlich je nach der Reihefolge entweder $180° - 2Q$ oder $180° + 2Q$. Es sei ferner der Neigungswinkel der beiden Dreh-Axen gegen einander — in der Figur ausgedrückt durch die beiden gleichen Bogenstücke $P K'$ und $P K''$ — gleich $90° - n$, der Neigungswinkel der optischen Axe gegen ihre unmittelbare Dreh-Axe oder der Bogen $S K' = S K''$ gleich $90° + c$, endlich die Poldistanz von S oder der Bogen $P S$ gleich p.

Jedes der beiden sphärischen Dreiecke $K' P S$ und $K'' P S$ ergiebt nun (der Winkel bei K werde noch mit V und der Winkel bei S mit W bezeichnet) zunächst folgende Beziehungen zwischen dem Winkel Q, der Poldistanz des Sternes p und dem Neigungswinkel der Dreh-Axen $90° - n$:



$$1)\quad \mathrm{Cos}\, c\, \mathrm{Sin}\, V = \mathrm{Sin} p\, \mathrm{Cos}\, Q$$

$$2)\quad \mathrm{Cos}\, c\, \mathrm{Cos}\, V = \mathrm{Cos} p\, \mathrm{Cos} n + \mathrm{Sin} p\, \mathrm{Sin} n\, \mathrm{Sin}\, Q$$

$$3)\quad -\mathrm{Sin}\, c = \mathrm{Cos} p\, \mathrm{Sin} n - \mathrm{Sin} p\, \mathrm{Cos} n\, \mathrm{Sin}\, Q.$$

Es ist bekanntlich die Gleichung 3, welche bei dem Durchgangs-Instrument im Meridian dazu dient, aus dem mittelst der Differenz der Durchgangszeiten eines Sternes S in der obern und der untern Culmination abgeleiteten Werthe von Q und mit Hülfe der Kenntnifs von p und c den Neigungswinkel der Dreh-Axen $90° - n$ zu bestimmen und zwar in der für sehr kleine Werthe von n und c, sowie für Werthe von p, die nicht von derselben Ordnung, wie n und c sind, zulässigen Abkürzung:

$$n\, \mathrm{Cos} p + c = Q\, \mathrm{Sin} p \ldots\ldots$$

Dieselbe Gleichung 3 dient dagegen bei dem Durchgangs-Instrument im ersten Vertical in der Form

$$\mathrm{Sin}(p - n) = 2\, \mathrm{Sin} p\, \mathrm{Cos} n\, \mathrm{Sin}^2 \frac{M}{2} + \mathrm{Sin}\, c$$

wo M für $90° - Q$ eingeführt ist, sowohl zur Bestimmung von n aus Q, p und c und dann mit Hülfe der Neigung i der Dreh-Axe gegen den Horizont zur Ermittelung der Polhöhe φ, als auch umgekehrt zur Bestimmung der Poldistanz p aus Q, n und c, wobei n aus φ und i hergeleitet wird.

Die Gleichung 3 kann aber — wenigstens der Theorie nach — auch beim Durchgangs-Instrument im Meridian in derselben Weise, wie im ersten Vertical, dazu benutzt werden, nicht blos n aus bekanntem Q, p und c, sondern auch unbekannte p aus Q, n und c abzuleiten, d. h. Differenzen von Poldistanzen zu bestimmen, und ebenso ist dies bei allen Zwischenstellungen der Dreh-Axe des Durchgangs-Instrumentes zwischen den Werthen $n = 0$ und $n = 90° - \varphi$ der Fall.

Es frägt sich nur, mit welcher Genauigkeit und innerhalb welcher Grenzen bei den verschiedenen Lagen der Dreh-Axe des Fernrohrs gegen die Erd-Axe dies möglich ist.

Um dies näher zu untersuchen, ist die Gleichung 3 total zu differenziren.

$$\begin{aligned} -\operatorname{Cos} c\, dc = {} & dn \{ \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} n + \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} Q \} \\ & - dp \{ \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} n + \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} Q \} \\ & - dQ \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} n \operatorname{Cos} Q \end{aligned}$$

Durch eine leichte Umformung der Coefficienten von dn und dp findet man hieraus:

$$4) \qquad \begin{aligned} -\operatorname{Cos} c\, dc = {} & dn \left\{ \frac{\operatorname{Cos} p + \operatorname{Sin} n \operatorname{Sin} c}{\operatorname{Cos} n} \right\} \\ & - dp \left\{ \frac{\operatorname{Sin} n + \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} p} \right\} \\ & - dQ \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} n \operatorname{Cos} Q \end{aligned}$$

In dieser Form wird eine Vereinfachung ersichtlich, welche man, ohne die Zwecke der vorliegenden Untersuchung irgend merklich zu gefährden, dadurch erreichen kann, daſs man $c = 0$ annimmt.

Die Beziehungen zwischen den kleinen Fehlerbeträgen dn, dp und $dQ \operatorname{Sin} p$ (Gröſsen erster Ordnung) können durch Weg-

lassung von Gliedern, in welchen sie multiplicirt mit einer Gröfse wie Sin c, die von derselben Ordnung ist, vorkommen, im Allgemeinen nicht merklich alterirt werden, und die sehr engbegrenzten singulären Fälle, in welchen dies für den obigen Coefficienten von dp nicht zutrifft, in denen nämlich n und p auch sehr kleine Gröfsen von der Ordnung von c sind, sowie die Fälle, in welchen bei Beobachtungen an den entfernteren Seitenfäden des Instrumentes überhaupt mit stärkeren Werthen von c zu rechnen ist, werden besser einer Specialbehandlung unterworfen, welche übrigens die allgemeinen Folgerungen nur ganz unwesentlich modificiren wird.

Man kann aber auch dc unbedenklich bei den nachfolgenden Ableitungen vernachlässigen, weil dieses, hier die Unsicherheit der Kenntnifs des wahren Werthes von c bezeichnende, Fehler-Element durch bekannte Hülfsmittel und Manipulationen nicht nur kleiner als die andern Fehler gehalten, sondern auch leicht durch die Umlegungen des Instrumentes vollkommen unschädlich gemacht werden kann.

Hiernach kann man also vereinfachend setzen:

$$4) \qquad 0 = dn\,\frac{\mathrm{Cos}\,p}{\mathrm{Cos}\,n} - dp\,\frac{\mathrm{Sin}\,n}{\mathrm{Sin}\,p} \ldots\ldots - dQ\,\mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Cos}\,n\,\mathrm{Cos}\,Q \ldots.$$

Zur Beurtheilung der Genauigkeit, mit welcher n aus beobachtetem Q und bekanntem p abgeleitet wird, hat man also die Relation:

$$5) \qquad dn = dQ\,\mathrm{Tg}\,p\,\mathrm{Cos}^2 n\,\mathrm{Cos}\,Q + dp\,\frac{\mathrm{Sin}\,2n}{\mathrm{Sin}\,2p}$$

dagegen zur Beurtheilung der Genauigkeit, mit welcher p aus beobachtetem Q und bekanntem n abgeleitet wird:

$$6) \qquad dp = -\,dQ\,\mathrm{Sin}^2 p\,\mathrm{Cotg}\,n\,\mathrm{Cos}\,Q + dn\,\frac{\mathrm{Sin}\,2p}{\mathrm{Sin}\,2n}$$

Was zunächst die Einflüsse eines bei der Bestimmung der Unterschiede der Durchgangszeiten in den beiden Lagen des Instrumentes vorauszusetzenden Beobachtungsfehlers dQ betrifft, so werden dieselben nach den obigen Ausdrücken noch nicht erschöpfend angegeben werden können, bevor nicht die Abhängigkeit,

in welcher bei Beobachtungen dieser Art dQ selbst ebenfalls zu p und n steht, vorher ermittelt und eingetragen ist. Unter Vorbehalt dieser Vervollständigung wollen wir einstweilen die Folgerungen näher betrachten, welche aus den Ausdrücken für die partiellen Differentialquotienten $\frac{dn}{dp}$ hervorgehen.

Da, wie man sieht, mit dem Durchgangs-Instrumente überhaupt nur solche Objecte eingestellt werden können, für welche p gröfser ist als n (eigentlich als $n+c$), so ergiebt sich, dafs bei Werthen von p, welche kleiner sind als $45°$, $\frac{dn}{dp}$ nicht gröfser als 1, $\frac{dp}{dn}$ nicht kleiner als 1 werden kann, umgekehrt natürlich, wenn p gröfser ist als $45°$ u. s. w.

Man kann also im Allgemeinen Werthe von n, die kleiner sind als $45°$ aus bekannten Poldistanzen p, die ebenfalls kleiner sind als $45°$, unter günstigen Bedingungen, nämlich mit vermindertem Einflufs der noch unbekannten kleinen Fehler dieser Poldistanzen ermitteln. Z. B. enthält beim Durchgangs-Instrument im Meridian die aus der Poldistanz des Polarsternes mittelst der Beobachtung der obern und untern Culminationszeit hergeleitete Bestimmung der Werthe von n, welche in der Regel eine Bogenminute nicht übersteigen werden, höchstens etwa $\frac{1}{80}$ des unbekannten kleinen Fehlers dieser Poldistanz selbst.

Will man aber umgekehrt mittelst des Durchgangs-Instrumentes aus so gefundenen Werthen von n die noch unbekannten Poldistanzen anderer Sterne ableiten, so geben folgende Anwendungen der obigen Ausdrücke Auskunft über den dabei erreichbaren Grad der Unabhängigkeit dieser Bestimmungen von den noch unbekannten kleinen Fehlern der bei der Bestimmung von n zu Grunde gelegten Poldistanzen.

Wenn z. B. die bekannte Poldistanz eines Fundamentalsternes mit p_1, die unbekannte Poldistanz eines anderen Sternes mit p_2 bezeichnet wird, so hätte man unter der blos vorläufigen Annahme, dafs der Einflufs der eigentlichen Beobachtungsfehler dQ in Betracht

der Möglichkeit seiner Einschränkung durch zahlreiche Wiederholungen der Beobachtungen vernachlässigt werden könne:

$$dn = dp_1 \frac{\mathrm{Sin}\, 2n}{\mathrm{Sin}\, 2p_1} \ldots.$$

$$dp_2 = dn \frac{\mathrm{Sin}\, 2p_2}{\mathrm{Sin}\, 2n} \ldots.$$

$$\text{also:} \quad dp_2 = dp_1 \frac{\mathrm{Sin}\, 2p_2}{\mathrm{Sin}\, 2p_1} \ldots.$$

Hiernach können, wenn p_1 kleiner als 45° ist, und wenn alle sonstigen obigen Voraussetzungen hinreichend erfüllt sind, Poldistanzen, welche kleiner sind, als die zu Grunde gelegte fundamentale p_1, bis zu dem Werthe $p_2 = n$ hinab, mit einer bei abnehmendem p_2 steigenden Unabhängigkeit von dem unbekannten Fehler der angenommenen fundamentalen Poldistanz bestimmt werden.

Einen vollständigen Aufschluſs über alle Genauigkeitsverhältnisse solcher Bestimmungen wird aber erst die Verbindung obiger Erwägungen mit der Untersuchung des Einflusses der unmittelbaren Beobachtungsfehler dQ ergeben.

Der Beobachtungsfehler dQ setzt sich zusammen aus den beiden Fehlern, welche bei der Beobachtung der Durchgangszeiten in den beiden Lagen des Instrumentes begangen werden, ferner aus dem unbekannten Fehler, mit welchem die Messung des halben Unterschiedes dieser beiden Beobachtungszeiten in Folge aller nicht berechenbaren Störungen des Ganges des zeitmessenden Apparates behaftet ist, endlich aus den Fehlern, welche durch die unvermeidliche und der Messung und Rechnung nicht vollständig zugängliche Veränderlichkeit der Lage der zweiten Axe, d. h. der unmittelbaren Dreh-Axe des Fernrohrs, gegen die erste Axe des Instruments, die Erd-Axe selbst, bedingt werden.

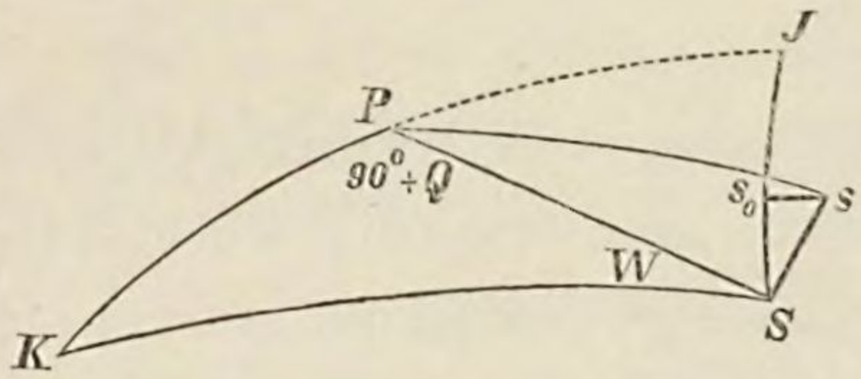
Was den die eigentlichen Beobachtungsfehler der Durchgangsepochen enthaltenden Theil des Fehleraggregates dQ betrifft, so wird derselbe, da Q aus dem halben Unterschiede zweier beob-

achteten Durchgangsepochen hervorgeht, sich unter der bekannten Form darstellen lassen:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2x^2+2\left\{F(p,n,y)\right\}^2}\ \ldots.$$

wo x der einem Beobachter bei demselben Instrument und derselben Art der Anstellung und Verzeichnung der Durchgangsbeobachtungen eigenthümliche, aber von p und n ganz unabhängige Theil des Beobachtungsfehlers eines einzelnen Durchganges — der eigentliche Epochenfehler — ist, und wo der Functionsausdruck $F(p,n,y)$, welcher noch näher zu bestimmen ist, den Einfluſs des zweiten Theils des einzelnen Beobachtungsfehlers, d. h. des eigentlichen Pointir- oder Gesichtsfehlers y, auf die Verspätung oder Verfrühung der Durchgangsbeobachtung darstellt.

Zur näheren Bestimmung des Ausdruckes $F(p,n,y)$ ist in nebenstehender Figur der von der Absehenslinie des Fernrohres beschriebene Parallelkreisbogen zu dem Pole der Dreh-Axe K mit SJ bezeichnet (wo $KJ=KS$).



Ein kleines Stück des Parallelkreises dagegen, welchen in Folge der Drehung des ganzen Instrumentes um die Erd-Axe der Stern S um den Pol P der letzteren zu beschreiben scheint, ist mit Ss bezeichnet (wo $PS=Ps$). Dasselbe kann bei der Kleinheit der Fehler, um die es sich hier handelt, als mit einem zu PS normalen Bogenstück gröfsten Kreises zusammenfallend angenommen werden.

Da nun die Durchgangsbeobachtungen sich auf die von der Absehenslinie bei der Drehung um ihre unmittelbare Axe (K) beschriebene Fläche, oder auf den von ihr am Himmel beschriebenen Parallelkreis SJ beziehen, nach welchem deshalb auch die Durchgangsfäden orientirt sind, so wird der Pointirfehler y, um welchen der Stern nach dieser oder jener Seite hin vom Faden in demjenigen Zeitpunkte noch oder schon entfernt ist, in welchem man irriger Weise den Durchgang durch den Faden zu beobachten

glaubt, in der Figur durch ss_0 dargestellt, und der Ausdruck $F(p,n,y)$, d. h. die Verspätung oder Verfrühung des Durchganges in Folge des Fehlers y, ist also nichts Anderes, als der Winkel SPs, für welchen die Gleichungen bestehen:

$$\text{Sin}\, SPs = \frac{\text{Sin}\, Ss}{\text{Sin}\, Ps}$$

$$\text{Sin}\, y \quad = \text{Sin}\, S\, s\ \text{Sin}\, s_0\, Ss$$

wo nach den Voraussetzungen der Winkel $s_0\ Ss$ sehr nahe gleich dem Winkel W ist.

Hieraus geht mit hinreichender Annäherung hervor:

$$F(p,n,y) = \frac{y}{\text{Sin}\, p\ \text{Sin}\, W}$$

Es ist aber im Dreieck KPS:

$$\text{Sin}\, W = \frac{\text{Cos}\, n\ \text{Cos}\, Q}{\text{Cos}\, c}$$

also mit der früher erläuterten Vereinfachung, nach welcher $\text{Cos}\, c = 1$ zu setzen ist

$$F(p,n,y) = \frac{y}{\text{Sin}\, p\ \text{Cos}\, n\ \text{Cos}\, Q}$$

wo Q nach der vereinfachten Gleichung 3 auch noch als Function von p und n ausgedrückt werden kann.

Man hat also für den in Rede stehenden Theil des Fehleraggregats dQ jetzt den expliciteren Ausdruck:

$$dQ = \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2\,\text{Sin}^2 p\ \text{Cos}^2 n\ \text{Cos}^2 Q}}$$

Da nun bei jedem der beiden correspondirenden Durchgänge nicht blos je eine Durchgangsepoche, welche mit der Wirkung der Fehler x und y behaftet sein kann, sondern von einzelnen Faden-Antritten eine gröfsere Anzahl beobachtet sein wird, die wir mit resp. h' und h'' bezeichnen wollen, und aus deren Mittelresultaten die eigentlichen Durchgangsepochen abgeleitet werden, so hat man noch etwas vollständiger für den aus blofsen Beobachtungsfehlern der Durchgänge hervorgehenden Theil des Ausdruckes dQ:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}\right)\left\{x^2+\frac{y^2}{\mathrm{Sin}^2 p\,\mathrm{Cos}^2 n\,\mathrm{Cos}^2 Q}\right\}}$$

Den von h' und h'' abhängigen Factor wollen wir in der Form $\frac{h'+h''}{4h'h''}$ mit $\frac{1}{H}$ bezeichnen, so dafs wir für obigen Ausdruck schreiben können:

$$\sqrt{\frac{x^2}{H}+\frac{y^2}{H\cdot\mathrm{Sin}^2 p\,\mathrm{Cos}^2 n\,\mathrm{Cos}^2 Q}}$$

Was nun denjenigen Theil von dQ betrifft, welcher durch die unvermeidlichen, der Messung und Rechnung einstweilen nicht zugänglichen, jedenfalls bei guten Einrichtungen nur kleinen Mängel und Störungen der Zeitmessung und der Verbindung der Dreh-Axe des Durchgangs-Instruments mit der Erd-Axe entsteht, so ist zunächst einleuchtend, dafs beide Fehlerquellen das Gemeinsame haben werden, dafs im Allgemeinen die Zahlenwerthe ihrer Wirkungen, deren Zeichen nach ihrem bis auf Weiteres vorauszusetzenden regellosen Charakter bald positiv, bald negativ sind, um so stärker anwachsen werden, je gröfserer Spielraum ihrer Accumulirung belassen, d. h. je gröfser das Zeitintervall zwischen den beiden correspondirenden Durchgängen ist. Das kleinste Zeitintervall zwischen zwei correspondirenden Durchgängen, welches man bei unmittelbarer Aufeinanderfolge derselben und bei einer zweckmäfsigen Wahl dieser Aufeinanderfolge einhalten kann, wird nun einem Drehungswinkel der Erde von $180°-2Q$ entsprechen, wobei zu ergänzen ist, dafs, wenn die beiden möglichen Werthe des Zeitintervalles jener unmittelbaren Aufeinanderfolge, $180°+2Q$ und $180°-2Q$, überhaupt stärker verschieden sind, Q stets positiv ist.

Der hier behandelte Theil des Fehlers dQ wird also eine unbestimmt zu lassende Function von Q sein, welche aber den Bedingungen unterliegt, dafs sie für $90°-Q=0$ auch Null ist und mit wachsendem Werthe von $90°-Q$ ihrem Zahlenwerthe nach zunimmt. Man wird also dieses Fehleraggregat, wenn man wie oben $90°-Q=M$ setzt, wo M stets eine positive Gröfse sein

wird, unter Berücksichtigung jener Bedingungen in der Form $\pm \sum a_r M^r$ einführen können, wo r beliebige positive Zahlenwerthe bedeuten soll.

Die unter diesem unbestimmten Ausdruck mit enthaltenen Einflüsse einer zwischen den correspondirenden Durchgangsbeobachtungen eintretenden Veränderung der Lage der unmittelbaren Dreh-Axe gegen die Erd-Axe zerfallen an sich in zwei Theile, in die Einflüsse einer Veränderung des Neigungswinkels $90° - n$ und einer Veränderung des Winkels, welchen die Ebene des gröfsten Kreises PK mit irgend einer in hinreichend unveränderlicher Weise an der Drehung der Erde betheiligten Ebene, z. B. der des Orts-Meridians PZ, macht. Letzterer Winkel wird in der Regel mit $90° - m$ bezeichnet.

Von den Veränderungen von $90° - n$ scheiden aus dem obigen Aggregat diejenigen aus, welche zwischen den beiden Durchgängen der Zeit proportional vor sich gehen, da man diese bei ihrer erfahrungsmäfsigen Kleinheit dadurch berücksichtigen kann, dafs man für ein veränderliches n als Epoche die Mitte zwischen den correspondirenden Durchgangszeiten gelten läfst. Es wird also im Allgemeinen unter obigem Aggregat nur ein sehr kleiner Theil der Veränderungen von n enthalten bleiben, was in sofern nicht unwesentlich ist, als die Veränderungen, welche n während der Messungen erleiden kann, auf dQ in ähnlicher Weise, wie die Wirkungen von y, einen von p und n abhängigen Einflufs haben würden, dessen nach dem Obigen näherungsweise gestattete Vernachlässigung bei den nachfolgenden den Charakter eines Zahlenbeispiels tragenden Erörterungen eine Vereinfachung darbietet.

Eine gewisse Controle der Veränderlichkeit von m und n ermöglichen bekanntlich auch die weiter unten zur Sprache kommenden Beziehungen zwischen diesen beiden Gröfsen und der Neigung und dem Azimuthe der Axe K.

Der nahezu vollständige Ausdruck des Fehleraggregates dQ wird nach allem Obigen lauten:

$$dQ = \sqrt{\frac{x^2}{H} + \frac{y^2}{H \cdot \mathrm{Sin}^2 p \, \mathrm{Cos}^2 n \, \mathrm{Cos}^2 Q} + \left\{\sum a_r M^r\right\}^2} \ldots .$$

Geht man jetzt auf die Ausdrücke 5 und 6 zurück, um dieselben durch Eintragung des oben gefundenen dQ vollständiger nach p, n und Q zu expliciren, so tritt uns zunächst noch die Erwägung entgegen, in wie weit wir in diesen Ausdrücken die dn und dp mit dem dQ als gleichartig behandeln können.

Das Increment dQ tritt hier schon nach der ganzen Zusammensetzung seines obigen Ausdruckes wesentlich als Maafsbestimmung eines Aggregates zufälliger Fehler auf.

Die Ausdrücke dn und dp werden dagegen bei den meisten Anwendungen der Gleichungen 5 und 6 die Bedeutung von vorläufig unbestimmten, aber bestimmbar bleibenden Verbesserungen der ersten Annahmen, sei es von p bei der Bestimmung von n, sei es von n bei der Bestimmung von p, haben. Mit Ausnahme besonderer überhaupt weniger streng zu behandelnder Fälle, in welchen man z. B. einen Werth von n aus den Poldistanzen p zahlreicher verschiedener Sterne ableiten und dabei im Mittelwerth von den Fehlern der einzelnen Poldistanzen sofort möglichst frei werden wollte, werden also die dn und dp von den in anderem Sinne wirkenden Fehlereinflüssen, die unter dQ enthalten sind, getrennt zu behandeln sein.

Es hat demnach für die Beziehungen zwischen dn und dp zunächst bei den bereits abgeleiteten partiellen Differential-Quotienten $\left(\frac{dn}{dp}\right)$ u. s. w sein Bewenden. Dagegen ersetzt man, um die Bestimmung derjenigen Fehler-Einflüsse gesondert zu halten, welche im Einzelnen unbestimmbar sind, weil sie nicht bleibende Werthe wie p, sondern vorübergehende wie Q betreffen, den Ausdruck dQ am besten durch den mit εQ zu bezeichnenden wahrscheinlichen Fehler von Q, welcher aus x, y u. s. w. durch Eintragung der empirisch bestimmbaren Zahlenwerthe des wahrscheinlichen Epochen-Fehlers x und des wahrscheinlichen Pointirfehlers y u. s. w. gefunden wird.

Man hat alsdann für die aus den unmittelbaren Beobachtungsfehlern hervorgehenden wahrscheinlichen Fehler von n resp. von p, wenn man für diese analog die Bezeichnungen εp und εn anwendet und für die blos einstweilen unbestimmt bleibenden Verbesserungen die Bezeichnungen dp und dn beibehält, folgende Gleichungen:

$$(\varepsilon n)^2 = \left(\frac{dn}{dQ}\right)^2 (\varepsilon Q)^2$$

$$(\varepsilon p)^2 = \left(\frac{dn}{dQ}\right)^2 (\varepsilon Q)^2 + \left(\frac{dp}{dn}\right)^2 (\varepsilon n)^2$$

$$dn = \left(\frac{dn}{dp}\right) dp$$

$$dp = \left(\frac{dp}{dn}\right) dn$$

Hier wird aber nach den obigen Unterscheidungen in der zweiten Gleichung unter εn nur der wahrscheinliche Fehler einzutragen sein, welcher bei einer vorangehenden auf eine bekannte Poldistanz p_1 basirten Bestimmung von n lediglich von dem zugehörigen εQ_1 herrührt, während die unbekannte Verbesserung der Poldistanz p_1 und ihr Einfluſs auf eine weiterhin durch Vermittelung von n abzuleitende unbekannte Poldistanz p_2 durch die bestimmtere Relation

$$dp_2 = \left(\frac{dp_2}{dn}\right) \cdot \left(\frac{dn}{dp_1}\right) \cdot dp_1$$

erhalten werden würde.

Tragen wir jetzt in die Gleichungen für εn und εp sämmtliche vorangehenden Resultate ein, so ergiebt sich:

$$(\varepsilon n)^2 = \left[\frac{x^2}{H} + \left\{\sum a_r M^r\right\}^2\right] \mathrm{Cos}^4 n \, \mathrm{Tg}^2 p \, \mathrm{Cos}^2 Q + \frac{y^2}{H} \frac{\mathrm{Cos}^2 n}{\mathrm{Cos}^2 p} \cdots$$

$$(\varepsilon p)^2 = \left[\frac{x^2}{H} + \left\{\sum a_r M^r\right\}^2\right] \mathrm{Cotg}^2 n \, \mathrm{Sin}^4 p \, \mathrm{Cos}^2 Q + \frac{y^2}{H} \frac{\mathrm{Sin}^2 p}{\mathrm{Sin}^2 n} + (\varepsilon n)^2 \left(\frac{\mathrm{Sin}\, 2p}{\mathrm{Sin}\, 2n}\right)^2 \cdots$$

wo endlich nach Gleichung 3 mit Vernachlässigung von c noch einzuführen ist:

$$\text{Sin } Q = \frac{\text{Tg } n}{\text{Tg } p} \quad . \quad . \text{ Sin } M = \text{Cos } Q = \sqrt{1 - \frac{\text{Tg}^2 n}{\text{Tg}^2 p}}$$

so dafs wir schliefslich haben:

$$8) \quad (\varepsilon n)^2 = \left(\frac{x^2}{H} + \sum\nolimits^2 a_r \left\{ arc \cdot \text{Sin} \sqrt{1 - \frac{\text{Tg}^2 n}{\text{Tg}^2 p}} \right\}^r \right) \text{Cos}^4 n (\text{Tg}^2 p - \text{Tg}^2 n) + \frac{y^2}{H} \frac{\text{Cos}^2 n}{\text{Cos}^2 p}$$

$$9) \quad (\varepsilon p)^2 = \left(\frac{x^2}{H} + \sum\nolimits^2 a_r \left\{ arc \cdot \text{Sin} \sqrt{1 - \frac{\text{Tg}^2 n}{\text{Tg}^2 p}} \right\}^r \right) \text{Sin}^2 p \ \text{Cos}^2 p \left(\frac{\text{Tg}^2 p}{\text{Tg}^2 n} - 1 \right) + \frac{y^2}{H} \frac{\text{Sin}^2 p}{\text{Sin}^2 n} + (\varepsilon n)^2 \left(\frac{\text{Sin } 2p}{\text{Sin } 2n} \right)^2$$

wo die Vieldeutigkeit der Ausdrücke arc . Sin durch die Grenzbestimmungen 0° und 90° des Bogens (M) beseitigt wird.

Um hiernach die Genauigkeitsverhältnisse beurtheilen zu können, unter welchen man bei beliebigen Werthen von n zwischen 0° und $90° - \varphi$ Differenzen von Poldistanzen aus Durchgangsbeobachtungen bestimmen kann, nehmen wir, wie oben, wieder an, die bekannte Poldistanz sei p_1, die unbekannte p_2.

Von dem Stern mit bekannter Poldistanz seien die Sternzeiten der correspondirenden beiden Durchgangsepochen T_1' und T_1'', von dem andern die Sternzeiten der entsprechenden Durchgangsepochen T_2' und T_2'' beobachtet worden.

Es wird dann berechnet:

$$M_1 = \tfrac{1}{2} \{ T_1'' - T_1' \}$$
$$M_2 = \tfrac{1}{2} \{ T_2'' - T_2' \}$$

und man findet aus den Grundgleichungen zunächst mit bekannter Einführung von Hülfsgröfsen Folgendes:

$$a \text{ Cos } A = \text{Cos } p_1$$
$$a \text{ Sin } A = \text{Sin } p_1 \text{ Cos } M_1$$
$$a \text{ Sin } (A - n) = \text{Sin } c$$

Nachdem hiermit n gefunden ist, bildet man:

$$b \operatorname{Sin} B = \operatorname{Sin} n$$
$$b \operatorname{Cos} B = \operatorname{Cos} n \,.\, \operatorname{Cos} M_2$$
$$b \operatorname{Sin} (p_2 - B) = \operatorname{Sin} c$$

woraus sich p_2 ergiebt.

Es wird keinen wesentlichen Vortheil bieten, diese strengen Formeln zur Ableitung von p_2 aus p_1 noch in allgemeinerer Weise zur Rechnung geschmeidiger zu machen, denn es wird sich zeigen, dafs es wegen der besonderen engen Beziehungen, die zwischen einem der beiden p und n stattfinden müssen, mit Ausnahme vereinzelter Fälle zweckmäfsig sein wird, die Ableitung von n aus p_1 und die von p_2 aus n getrennt zu halten, wodurch bei zahlreichen Beobachtungen auch noch Zwischencontrolen vermittelst der Werthe von n erhalten werden.

Kann man c ganz vernachlässigen oder ist c aus den Differenzen der Durchgangsepochen durch geeignete Umlegungs-Combinationen, deren Erörterung zu den praktischen Details gehört, vollständig beseitigt, was meistens leicht und sicher genug ausführbar sein wird, so vereinfacht sich die Berechnung der mittelst des Durchgangs-Instruments zu erlangenden Bestimmung von p_2 aus p_1 erheblich. Es ist dann in den obigen Ausdrücken $n = A$ und $p_2 = B$ und somit

$$\operatorname{Tg} n = \operatorname{Tg} p_1 \operatorname{Cos} M_1$$
$$\operatorname{Tg} p_2 = \operatorname{Tg} n \operatorname{Sec} M_2$$

also:
$$\operatorname{Tg} p_2 = \operatorname{Tg} p_1 \frac{\operatorname{Cos} M_1}{\operatorname{Cos} M_2}$$

Die Differenzirung dieser Gleichung würde dieselben Beziehungen zwischen den Beobachtungsfehlern der Werthe M_1, M_2 und dem gesuchten Werthe p_2 liefern, wie die obigen Gleichungen 8 und 9, nachdem in 8 alle Beobachtungsdaten, die sich auf den Stern von bekannter Poldistanz beziehen, mit dem Index 1 und in 9 alle Angaben, die sich auf den Stern beziehen, dessen Poldistanz gesucht wird, mit dem Index 2 bezeichnet sind, und nachdem alsdann das mittelst der Gleichung 8 gebildete εn in die Gleichung 9 eingetragen ist. Die vorgängige getrennte Aufstellung

der Gleichungen 8 und 9 dürfte indessen zweckmäfsiger sein, da dieselbe auch noch andere Fragen zu beantworten geeignet ist.

Vor der weiteren Anwendung dieser Gleichungen wird es bequem sein, für die Ausdrücke von der unbestimmten Form

$$\sum a_r \left\{ \text{arc} \cdot \text{Sin} \sqrt{1 - \frac{\text{Tg}^2 n}{\text{Tg}^2 p}} \right\}^r$$

die abgekürzte Bezeichnung U einzuführen.

Wir haben dann durch die eben erörterte Combination von 8 und 9 die Gleichung 10:

$$\begin{aligned} (\varepsilon p_2)^2 = &\left(\frac{x^2}{H_2} + U_2^2\right) \text{Sin}^2 p_2 \, \text{Cos}^2 p_2 \left(\frac{\text{Tg}^2 p_2}{\text{Tg}^2 n} - 1\right) \\ &+ \left(\frac{x^2}{H_1} + U_1^2\right) \text{Sin}^2 p_2 \, \text{Cos}^2 p_2 \left(\frac{\text{Tg}^2 p_1}{\text{Tg}^2 n} - 1\right) \\ &+ \left\{\frac{y^2}{H_2} + \frac{y^2}{H_1}\left(\frac{\text{Cos} p_2}{\text{Cos} p_1}\right)^2\right\}\left(\frac{\text{Sin} p_2}{\text{Sin} n}\right)^2 \end{aligned} \qquad 10)$$

Hieraus geht zunächst hervor, dafs die Poldistanz p_2 aus einer anderen Poldistanz p_1 um so unabhängiger von dem Einflufs der Beobachtungsfehler bestimmt wird, je weniger jede der beiden Poldistanzen, aber insbesondere p_2 von n verschieden ist.

Mit der Annäherung von p_2 und p_1 an n convergirt der Einflufs der durch x und U bezeichneten Fehlerquellen gegen Null und der Coefficient, welcher den Einfiufs der mit y bezeichneten Fehlerquellen bestimmt, gegen den Minimalwerth 1.

Bei den Durchgangsbeobachtungen in der Nähe des Meridians, bei welchen wegen der erforderlichen horizontalen Lage der Dreh-Axe der Werth von n nahe gleich Null gehalten werden mufs, hat man bisher aus nahe liegenden Gründen, so viel mir bekannt ist, keine Anwendung von Durchgangsbeobachtungen in beiden Culminationen zur Bestimmung der Differenzen von Poldistanzen gemacht. Einestheils scheinen auf den ersten Blick obige Bedingungen die Grenzen solcher Bestimmungen auf die unmittelbare Nähe am Pol und auf sehr kleine Differenzen $p_2 - p_1$ einzuschränken, anderntheils hat man im Meridian mit Recht die starken Einflüsse der oben mit U bezeichneten Fehlerquellen gefürchtet, welche in

der That bei Durchgangsbeobachtungen in der Nähe des Meridians, wo wegen des kleinen n schon bei mäfsigen Poldistanzen die Werthe der M sich ihren Maximalbeträgen 90° oder 6^h nähern, sehr erheblich sein können.

Hier dürfte übrigens die Bemerkung einzuschalten sein, dafs falls p_1 und p_2 einander sehr nahe gleich und auch die Rectascensionen der beiden Sterne nur wenig verschieden sind, die beiden U als nahe identisch betrachtet werden können, so dafs sie dann nicht mehr als zufällige und unabhängige Fehler zu behandeln wären, sondern nach den Zeichen ihrer Coefficienten algebraisch zusammengezogen werden müfsten, wobei sie sich, wie man aus der Differenzirung der Gleichung $\text{Tang}\, p_2 = \text{Tang}\, p_1 \frac{\text{Cos}\, M_1}{\text{Cos}\, M_2}$ leicht ersieht, auf den unter obigen Voraussetzungen sehr kleinen Gesammtwerth $U\ \text{Sin}\, p_2\ \text{Cos}\, p_2\ (\text{Tang}\, M_2 - \text{Tang}\, M_1)$ reduciren würden.

Da aber, wie im Folgenden gezeigt werden wird, die sehr nahe Gleichheit der p_2 und p_1 gar nicht festgehalten zu werden braucht, vielmehr der Spielraum dieses Unterschiedes ziemlich grofs angenommen werden kann, und da auch im Allgemeinen die Verschiedenheiten der Rectascensionen die Durchgangsepochen beliebiger Combinationen von Sternen merklich von einander verschieden machen werden, so wird es richtiger sein, die unabhängige Summirung der Fehler-Einflüsse U nach den Ausdrücken unter No. 10 generell beizubehalten.

Im ersten Vertical hat man das Durchgangs-Instrument schon öfter zu Bestimmungen der Differenzen von Poldistanzen angewandt, wobei der wesentliche Vortheil benutzt worden ist, dafs dort der Zwischenwerth n fast erschöpfend genau durch die blofse Bestimmung der Neigung i der Dreh-Axe gegen den Horizont aus dem festen Werthe $90° - \varphi$ jederzeit abgeleitet werden kann, so dafs sich die Bestimmung der Differenzen von Poldistanzen im ersten Vertical eigentlich darauf reducirt, dafs man dort Meridian-Zenithdistanzen mifst, die Poldistanz des Zeniths aber aus den

Poldistanzen p_1 einiger wenigen an getheilten Kreisen gut bestimmten Sterne ableitet, deren p_1 nur wenig gröfser als n oder $90° - \varphi$ ist.

Wenn man aber die Zahlenwerthe der Fehler-Coefficienten in der Gleichung 10 etwas näher prüft, so erkennt man, dafs nicht nur die bisher meist eingehaltenen Grenzen der Ausdehnung dieses Verfahrens in der Nähe des ersten Verticals erweitert werden können, ohne dafs die unvermeidlichen Fehler-Einflüsse so grofs werden, um im Vergleich mit den Fehlern der Ermittelung von Poldistanzen mit getheilten Kreisen ungünstigere Bestimmungen zu liefern, sondern dafs auch in der Nähe des Meridians und bei allen Zwischenwerthen von n zwischen 0 und $90° - \varphi$ aus Durchgangsbeobachtungen Differenzen von Poldistanzen noch sicher genug abgeleitet werden können, wenn diese Differenzen auch — mit gewissen Einschränkungen bei der Annäherung der Poldistanzen an $90°$ — mehrere Zehner des Grades betragen.

Eingehendere Erwägungen der Gleichung 10 zeigen nämlich Folgendes:

Kann man n bis auf kleine Unterschiede, welche bei der Berechnung der Fehlereinflüsse unerheblich sind, also etwa bis auf Bruchtheile des Grades, gleich p_2 machen, so nimmt die Gleichung die folgende Gestalt 10_n an:

$$(\varepsilon p_2)^2 = \frac{y^2}{H_2} + \frac{y^2}{H_1}\frac{\mathrm{Cos}^2 n}{\mathrm{Cos}^2 p_1} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{x^2}{H_1} + U_1^2\right)\left(\frac{\mathrm{Tg}^2 p_1}{\mathrm{Tg}^2 n} - 1\right)\mathrm{Sin}^2 2n \ldots \Big\} 10_n$$

Vor weiterer Discussion dieser Gleichung ist noch zu bemerken, dafs, so lange die unbekannte Poldistanz p_2 und die bekannte p_1 nicht stark von einander verschieden sind, es gleichgültig sein wird, welcher von diesen beiden Werthen der kleinere und nahe gleich n ist.

Nimmt man die bekannte Poldistanz p_1 als sehr nahe gleich n an und läfst die unbekannte p_2 gröfser sein als p_1, so hat man aus Gleichung 10 für die wahrscheinliche Unsicherheit dieser Bestimmung von p_2 den Ausdruck:

$$(\varepsilon p_2)^2 = \frac{y^2}{H_2}\frac{\mathrm{Sin}^2 p_2}{\mathrm{Sin}^2 n} + \frac{y^2}{H_1}\frac{\mathrm{Sin}^2 2p_2}{\mathrm{Sin}^2 2n} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{x^2}{H_2} + U_2^2\right)\left(\frac{\mathrm{Tg}^2 p_2}{\mathrm{Tg}^2 n} - 1\right)\mathrm{Sin}^2 2p_2 \ldots \Bigg\} 10_p$$

Ist hier p_2 nicht viel gröfser als die einander nahe gleichen Werthe n und p_1, so unterscheidet sich dieser Ausdruck nur wenig im ungünstigen Sinne von dem obigen 10_n, bei welchem die entgegengesetzte Voraussetzung gemacht ist.

Sobald aber der Unterschied von p_2 und p_1 erheblicher und so lange dabei nicht n grofs genug ist, um den Faktor $\frac{\mathrm{Sin}\,2p_2}{\mathrm{Sin}\,2n}$ nahe gleich 1 oder kleiner als 1 zu machen, ergeben die obigen Gleichungen, dafs mit Hülfe von Durchgangsbeobachtungen eine Poldistanz aus einer andern bereits bekannten nur dann ohne unzulässige Vergröfserung der unvermeidlichen Fehlereinflüsse abgeleitet werden kann, wenn die gesuchte Poldistanz dem Werthe n näher liegt, als die bekannte, ganz ähnlich, wie es bei gröfseren Unterschieden der Poldistanzen zweier Sterne fehlerhaft ist, mit Hülfe der beobachteten Differenz ihrer Durchgangszeiten durch den Meridian die Rectascension des vom Pole entfernteren aus der Rectascension des dem Pole sehr nahen abzuleiten, wie es vielmehr allein richtig ist, mittels der Differenzen der Durchgangszeiten aus den Rectascensionen der vom Pol entfernteren Sterne die Rectascensionen der dem Pol viel näheren Sterne zu bestimmen.

Auch die Gleichung $dp_2 = dp_1 \frac{\mathrm{Sin}\,2p_2}{\mathrm{Sin}\,2p_1}$ hat uns oben schon zu ähnlichen Folgerungen in Betreff der auf Durchgangsbeobachtungen zu begründenden Bestimmung unbekannter Poldistanzen aus bekannten geführt.

Nach Gleichung 10_n ist nun unter Einhaltung der Bedingungen, dafs p_2 nahe gleich n und $p_1 > p_2$ sein soll, die Genauigkeit der Bestimmung von p_2 aufser von den Zahlenwerthen der Fehler y, x, U_1 abhängig von den Werthen der Coefficienten

$$\frac{\mathrm{Cos}\, n}{\mathrm{Cos} p_1} \text{ und } \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\, 2n \sqrt{\frac{\mathrm{Tg}^2 p_1}{\mathrm{Tg}^2\, n} - 1}$$

die wir a_n und b_n bezeichnen wollen.

Was zunächst die Zahlenwerthe der y, x, U_1 betrifft, so kann man bei mittleren Luftzuständen, guten optischen Qualitäten des Instrumentes und einiger Uebung des Beobachters annehmen, dafs der wahrscheinliche Fehler y den Werth von $0''{,}25$ nicht übersteigen wird. Der Werth des wahrscheinlichen Fehlers x wird unter ähnlichen Voraussetzungen und bei der Anwendung der Registrir-Methode $0''{,}8$ kaum übersteigen. Der Zahlenwerth von U_1 wird am unbestimmtesten bleiben. Man kann aber wenigstens als Grenzwerth annehmen, dafs der gröfste Betrag des wahrscheinlichen Fehlers U_1 — nämlich für $M_1 = 90°$ oder 6^h — höchst selten und nur bei wirklich unzureichenden Einrichtungen $1''{,}0$ überschreiten wird.

Der Einfluſs von y und x wird nun durch Vervielfältigung der Durchgangsbeobachtungen an zahlreichen Seitenfäden wesentlich vermindert. Die Factoren $\frac{1}{\sqrt{H_1}}$ und $\frac{1}{\sqrt{H_2}}$, welche diese Verminderung ausdrücken, können leicht auf den Werth $\frac{1}{3}$ gebracht werden. Man könnte hiernach annehmen, dafs $\frac{y}{\sqrt{H_1}}$ und $\frac{y}{\sqrt{H_2}}$ sich innerhalb der Grenze $0''{,}05$ und $\frac{x}{\sqrt{H_1}}$ innerhalb der Grenze $0''{,}16$ halten lassen. In Betracht der Erfahrung jedoch, dafs auch bei den Durchgangsbeobachtungen kleine Fehlerquellen vorhanden sind, welche leicht bei mehreren unmittelbar aufeinanderfolgenden Beobachtungen in demselben Sinne auftreten, wird man diese Verkleinerungen nicht als vollkommen sicher ansehen können und daher gut thun, die Werthe von $\frac{y}{\sqrt{H}}$ etwa auf $0''{,}10$ und von $\frac{x}{\sqrt{H}}$ auf $0''{,}30$ anzusetzen.

Den jedesmaligen nur näherungsweise anzugebenden Werth von U_1 endlich wird man nicht zu klein ansetzen, wenn man ihn nach der Formel $1''{,}0 \sqrt{\frac{M_1}{6^h}}$ berechnet, welchen Ausdruck wir kurz

mit $1''{,}0\sqrt{v}$ bezeichnen wollen. Der wahre Werth wird voraussichtlich zwischen $1''{,}0\sqrt{v}$ und $1''{,}0 \times v$, dem letzteren sogar etwas näher liegen. Wir bezorzugen jedoch den ersteren, weil er gröfsere Werthe von U_1 bedingt und somit die Genauigkeit nicht in zu vortheilhaftem Lichte erscheinen läfst.

Eine Uebersicht der Zahlenwerthe der Coefficienten a_n und b_n sowie der Werthe M_1 (in Stunden angegeben), welche letzteren zur ungefähren Beurtheilung der zu erwartenden Gröfse von U_1 dienen können, wird durch folgende Täfelchen gewährt, welche ohne Einschränkung auf eine bestimmte Polhöhe nach den Werthen n von 0° bis 80° und nach den Werthen p_1 von $n+1°$ bis $n+50°$ aufgestellt sind.

I. Zahlenwerthe des Factors $a_n = \dfrac{\mathrm{Cos}\, n}{\mathrm{Cos}\, p_1}$

	$n=0°,0\ldots$	$n=1°$	$n=5°$	$n=10°$	$n=20°$	$n=30°$	$n=40°$	$n=50°$	$n=60°$	$n=70°$	$n=80°$
$p_1 = n+1°$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,05	1,11
$p_1 = n+5°$	1,00	1,01	1,01	1,02	1,04	1,06	1,08	1,12	1,18	1,32	1,99
$p_1 = n+10°$	1,02	1,02	1,03	1,05	1,09	1,13	1,19	1,29	1,46	1,97	
$p_1 = n+20°$	1,06	1,07	1,10	1,14	1,23	1,35	1,53	1,88	2,88		
$p_1 = n+30°$	1,15	1,17	1,22	1,29	1,46	1,73	2,24	3,70			
$p_1 = n+40°$	1,31	1,33	1,41	1,53	1,88	2,53	4,41				
$p_1 = n+50°$	1,56	1,59	1,74	1,97	2,75	4,99					

II. Zahlenwerthe des Factors $b_n = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\, 2n \sqrt{\dfrac{\mathrm{Tg}^2 p_1}{\mathrm{Tg}^2 n} - 1}$

	$n=0°,0\ldots$	$n=1°$	$n=5°$	$n=10°$	$n=20°$	$n=30°$	$n=40°$	$n=50°$	$n=60°$	$n=70°$	$n=80°$
$p_1 = n+1°$	0,02	0,03	0,06	0,08	0,11	0,13	0,13	0,13	0,13	0,11	0,08
$p_1 = n+5°$	0,09	0,10	0,15	0,20	0,26	0,30	0,32	0,33	0,32	0,30	0,30
$p_1 = n+10°$	0,18	0,19	0,25	0,31	0,40	0,46	0,50	0,52	0,53	0,53	
$p_1 = n+20°$	0,36	0,38	0,45	0,53	0,67	0,78	0,89	1,02	1,35		
$p_1 = n+30°$	0,58	0,60	0,69	0,80	1,00	1,23	1,54	2,29			
$p_1 = n+40°$	0,84	0,87	0,99	1,14	1,50	2,01	3,29				
$p_1 = n+50°$	1,19	1,23	1,41	1,67	2,40	4,23					

III. Zahlenwerthe des Winkels M_1 (in Stunden ausgedrückt)

	$n=0^0,0\ldots$	$n=1^0$	$n=5^0$	$n=10^0$	$n=20^0$	$n=30^0$	$n=40^0$	$n=50^0$	$n=60^0$	$n=70^0$	$n=80^0$
	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h
$p_1 = n + 1^0$	6,0	4,0	2,2	1,7	1,2	1,1	1,0	1,0	1,1	1,3	1,7
$p_1 = n + 5^0$	6,0	5,4	4,0	3,3	2,6	2,3	2,2	2,2	2,4	2,8	4,0
$p_1 = n + 10^0$	6,0	5,7	4,7	4,1	3,4	3,1	3,0	3,1	3,4	4,1	
$p_1 = n + 20^0$	6,0	5,8	5,3	4,8	4,3	4,1	4,1	4,3	4,8		
$p_1 = n + 30^0$	6,0	5,9	5,5	5,2	4,8	4,7	4,8	5,2			
$p_1 = n + 40^0$	6,0	5,9	5,7	5,4	5,2	5,2	5,4				
$p_1 = n + 50^0$	6,0	5,9	5,8	5,6	5,5	5,6					

Mit Hülfe der Zahlenwerthe I bis III wollen wir jetzt, unter beispielsweiser Eintragung der Zahlenwerthe der x, y, H und U_1, nach den der Gleichung 10_n zu Grunde liegenden Annahmen eine Uebersicht der wahrscheinlichen Fehler εp_2 für verschiedene Werthe von n und p_1 aufstellen.

IV. Zahlenwerthe der wahrscheinlichen Fehler εp_2

$$\varepsilon p_2 = \sqrt{0{,}01\,(1 + a_n{}^2) + b_n{}^2\,(0{,}09 + 1{,}00 \cdot v)}$$

	$n=0^0,0\ldots$	$n=1^0$	$n=5^0$	$n=10^0$	$n=20^0$	$n=30^0$	$n=40^0$	$n=50^0$	$n=60^0$	$n=70^0$	$n=80^0$
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
$p_1 = n + 1^0$	0,14	0,14	0,15	0,15	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16
$p_1 = n + 5^0$	0,17	0,17	0,19	0,21	0,24	0,25	0,26	0,27	0,27	0,28	0,34
$p_1 = n + 10^0$	0,24	0,24	0,27	0,31	0,36	0,39	0,41	0,44	0,47	0,51	
$p_1 = n + 20^0$	0,40	0,42	0,47	0,52	0,62	0,70	0,80	0,94	1,31		
$p_1 = n + 30^0$	0,62	0,64	0,71	0,80	0,96	1,16	1,47	2,28			
$p_1 = n + 40^0$	0,89	0,92	1,02	1,15	1,49	1,99	3,32				
$p_1 = n + 50^0$	1,26	1,29	1,46	1,71	2,43	4,32					

Aus diesen Fehlerwerthen ergiebt sich nun Folgendes:

Wären dieselben den Voraussetzungen entsprechend wirklich rein zufälligen Charakters, wäre es also gesichert, dafs ihre Einflüsse schon durch eine Reihe unmittelbar aufeinanderfolgender Beobachtungen derselben Combination noch ansehnlich weiter ein-

geschränkt werden können, so könnte man wenigstens bei allen Werthen von n, die kleiner sind als 40°, noch unbedenklich solche Differenzen $p_2 - p_1$ aus Durchgangsbeobachtungen bestimmen, welche kleiner sind als 20°. Bei Werthen von n unter 10° brauchten dieselben sogar nur kleiner zu sein als 30°. Denn die zufälligen Fehler, mit welchen sonst Differenzen von Poldistanzen aus Ablesungen an getheilten Kreisen bestimmt werden, betragen für eine einzelne Beobachtungs-Combination wohl nur in den seltensten Fällen, d. h. bei Beobachtungsreihen, die mit den vollkommensten Mitteln und von den schärfsten und umsichtigsten Beobachtern ausgeführt werden, erheblich weniger als 0″,4 und, was das Entscheidenste ist, diesen Beobachtungen kleben, trotz der mühsamsten Wiederholungen, systematische Fehler von nicht viel geringerem Betrage an, welche in instrumentalen Ursachen u. s. w. liegen, und deren Einfluſs durch Wiederholungen mit demselben Instrument im Allgemeinen nur wenig vermindert wird. Man erkennt dies deutlich, wenn man Bestimmungen von Poldistanzen vergleicht, die an verschiedenen fundamentalen Kreisen angestellt sind.

Nun sind allerdings auch bei den Bestimmungen der Differenzen von Poldistanzen aus Durchgangsbeobachtungen systematische Fehlereinflüsse vorhanden. Insbesondere muſs man zugeben, daſs ein Theil der oben unter dem Ausdruck U vereinigten Fehlereinfiüsse an mehreren unmittelbar aufeinanderfolgenden Beobachtungstagen sehr nahe in demselben Sinn und Betrage auftreten kann. Gerade von diesen Fehlereinflüssen aber kann man annehmen, daſs sie in den Mittelwerthen aus Wiederholungen in längeren Zeiträumen, z. B. durch cyklische Summirung innerhalb eines Jahres, sich noch vollständiger aufheben, als wenn sie im gewöhnlichen Sinne ganz zufällig und ohne jede erkennbare Beziehung zu der Zeit wären.

Ein Gleiches wird sich nur von wenigen und nur von den unbedeutenderen unter den Fehlereinflüssen, die in systematischer Weise auf die Kreis-Ablesungen einwirken, behaupten lassen.

Von den rein instrumentalen Fehlern, welche bei den Durchgangsbeobachtungen in systematischer Weise auftreten können,

haben wir bisher die Unvollkommenheiten der Zapfengestalten und die Seitenbiegungen des Rohres nicht erwähnt.

Von beiden ist es aber durch zahlreiche gute Ausführungen erwiesen, dafs sie auf ein verschwindend kleines Maafs gebracht werden können, und gerade in dieser Beziehung (in gleichmäfsigen Härtungen u. s. w.) hat die neuere Technik sehr bemerkliche Fortschritte gemacht.

Von den unter U vereinigten Fehlereinflüssen können übrigens die aus Unvollkommenheiten der Zeitmessung hervorgehenden ebenfalls bei guten Einrichtungen noch weiter, als bisher im Allgemeinen ermöglicht worden ist, vermindert werden, und auch in Bezug auf die Stetigkeit der Mitbewegung des Instrumentes mit der Drehung der Erde sind, besonders bei Aufstellungen auf einem Pfeiler und passenden Einhüllungen desselben, weitere Fortschritte naheliegend, so dafs die obigen Zahlenannahmen bei zweckmäfsigen Einrichtungen nur Maximalwerthe darstellen werden.

Hier ist nun auch der Ort, noch den Einfluss einer Fehlerquelle zu berücksichtigen, welcher bisher nicht zur Sprache gebracht worden ist, weil er sich ganz getrennt von den übrigen behandeln läfst, und weil es rathsam erschien, vorher die andern Genauigkeitsbedingungen zu erörtern, um die daraus hervorgehenden Beobachtungsvorschriften bei dieser letzten Untersuchung verwerthen zu können.

Unter den in der Gleichung 9 mit εn bezeichneten Fehlereinflüssen ist nämlich bisher nur die Fehlerhaftigkeit der Beobachtung von Q_1 oder M_1, insofern dieselbe die Ableitung von n aus p_1 verfälscht, verstanden worden. Wenn aber zwischen der Epoche, für welche n aus p_1 bestimmt worden ist, und der Epoche, zu welcher die Kenntnifs dieses n zum Zwecke der Bestimmung von p_2 erfordert wird, ein längeres Zeitintervall liegt, dann mufs die unvermeidliche wenn auch kleine Veränderlichkeit der n bewirken, dafs zu dem bisher berechneten εp_2 noch ein Fehlerelement εn hinzukommt, von welchem in Bezug auf die systematische Wiederholung seiner Einwirkungen bei Wiederholungen einer und der-

selben Combination von p_2 und p_1 an aufeinanderfolgenden Tagen und in Bezug auf die Aufhebung seines Einflusses durch jährliche cyklische Summirung der Wiederholungsresultate nahezu dasselbe gilt, was eben über die Fehlerquelle U gesagt worden ist.

Von diesem Einflufs der Veränderlichkeit von n könnte man aber fast ganz frei werden, wenn man dafür sorgte, dafs die Rect-ascensionen der beiden Sterne, deren Poldistanzen p_1 und p_2 unter einander in Beziehung gesetzt werden sollen, nahezu dieselben sind.

Allerdings würde dies eine wesentliche Einschränkung enthalten und die Bestimmung eines umfassenden Systems von Differenzen der Poldistanzen in einzelne Ketten auflösen, die sich in gesonderten Gruppen von nahe übereinstimmenden Rectascensionen nach dem Pol hin erstreckten, die aber untereinander im Allgemeinen nur unter Zulassung des obigen Einflusses der Veränderlichkeit von n in Verbindung gesetzt werden könnten.

Nun läfst sich aber ein instrumentales Mittel finden, um diesen letzteren Uebergang von Kette zu Kette bis auf verschwindend kleine anderweitige Fehlereinflüsse von der Veränderlichkeit der n zu befreien.

Bei der Anwendung des Durchgangs-Instrumentes im ersten Vertical, wobei die Dreh-Axe des Instrumentes nahezu im Meridian liegt, werden nämlich die Veränderungen von n vollständig durch die Veränderungen der Neigung i der Dreh-Axe gegen den Horizont angegeben, die bekanntlich mit einer sehr grofsen Schärfe mefsbar sind.

Man wird also in jeder Kette von den Poldistanzen p_1 solcher Sterne ansgehen müssen, welche nur sehr wenig gröfser als $90° - \varphi$ sind, und man wird diese Ausgangs- oder Fundamental-Sterne dann von Kette zu Kette unter Anwendung eines n, welches sehr nahe gleich $90° - \varphi$ ist, sehr scharf mit einander vergleichen können, indem man gleichzeitig alle kleinen Veränderungen von n durch unablässige Beobachtungen von i controlirt.

Nehmen wir beispielsweise $\varphi = 50°$ an, so ergiebt die Tabelle IV, dafs wir aus einer Poldistanz $p_1 = 90° - \varphi = 40°$

eine Poldistanz $p_2 = 1^\circ$ unt. Anw. v. $n = 1^\circ$ mit einem wahrsch. Fehler v. $0''{,}9$
„ „ $p_2 = 5$ „ „ „ $n = 5$ „ „ „ „ „ $0{,}8$
„ „ $p_2 = 10$ „ „ „ $n = 10$ „ „ „ „ „ $0{,}8$
„ „ $p_2 = 20$ „ „ „ $n = 20$ „ „ „ „ „ $0{,}6$
„ „ $p_2 = 30$ „ „ „ $n = 30$ „ „ „ „ „ $0{,}4$

bestimmen können, falls die Rectascensionen der beiden Sterne nicht stark von einander verschieden sind.

Da diese Fehler bei directer Bestimmung der kleineren Poldistanzen unter 20° aus $p_1 = 40^\circ$ hiernach etwas grofs ausfallen, und da überdies die Zenithdistanz schon ziemlich grofs ist, in welcher ein Stern von 40° Poldistanz bei 50° Polhöhe mit einem Durchgangs-Instrument, dessen Lage durch $n = 1^\circ$ und $i = 0$ bestimmt ist, in einer der beiden Durchgangsepochen, nämlich bei der in die Nähe der unteren Culmination fallenden, beobachtet wird, so wird man vielleicht vorziehen, abschnittweise vorzugehen, indem man zunächst die Poldistanzen p_2 bis zu 20° abwärts bei einem n von 20° aus einem $p_1 = 40^\circ$ und dann die geringeren Poldistanzen aus diesen in der Nähe von 20° bestimmten Poldistanzen herleitet, oder indem man hierin noch weiter geht und das Intervall von 0° bis 40° in getrennte Beobachtungs-Abschnitte von 10° theilt. Man bestimmt

bei $n = 30^\circ$ aus einem $p_1 = 40^\circ$ ein $p_2 = 30^\circ$ mit einem wahrsch. Fehler von $0''{,}4$
„ $n = 20$ „ „ „ $p_1 = 30$ „ $p_2 = 20$ „ „ „ „ „ $0{,}4$
„ $n = 10$ „ „ „ $p_1 = 20$ „ $p_2 = 10$ „ „ „ „ „ $0{,}3$
„ $n = 1 \ldots$ „ „ „ $p_1 = 10$ „ $p_2 = 1$ „ „ „ „ „ $0{,}2$

Summirt man die Quadrate dieser Fehler, so erhält man auf diesem Wege für den wahrscheinlichen Fehler eines aus $p_1 = 40^\circ$ abgeleiteten $p_2 = 1^\circ$ nur $0''{,}7$, also merklich kleiner, als oben mit $0''{,}9$ bei directem Uebergang von $p_1 = 40^\circ$ auf $p_2 = 1^\circ$ gefunden war. Dasselbe Experiment, in Abschnitten von 5° ausgeführt, würde für den wahrscheinlichen Fehler des Uebergangs von $p_1 = 40^\circ$ auf $p_2 = 1^\circ$ den Werth $0''{,}6$ ergeben.

Durch wiederholte Beobachtungen dieser Art wird man jeden-

falls eine Reihe von Poldistanzen p_2, welche kleiner sind als die Poldistanz des Zeniths, in mittleren Breiten mit einer ausreichenden Genauigkeit an solche Poldistanzen anschliefsen können, welche nur wenig gröfser als die des Zeniths sind.

Da man in Betracht der oben hervorgehobenen Wichtigkeit der Bestimmung der Veränderungen von n durch die Messung der Neigung i der Dreh-Axe jedenfalls an diese letzteren Poldistanzen als die besten Ausgangs-Werthe gebunden sein wird, so entsteht noch die Frage, ob man nicht von ihnen ausgehend auch nach der Seite der gröfseren Poldistanzen hin noch leidlich gute Anschlüsse mit Anwendung von Durchgangsbeobachtungen bekommen könnte.

Durch die obigen Gleichungen 10_n und 10_p ist bereits ersichtlich gemacht, dafs es zwar bei Werthen von n, welche kleiner sind als 45°, im Allgemeinen günstiger ist, die kleinen Poldistanzen, denen das jedesmalige n stets nahezu gleichkommen mufs, aus den gröfseren Poldistanzen abzuleiten, dafs aber, wenn n den Werth 45° überschreitet, dieses Verhalten sich bezüglich des Gesammtbetrages der Fehlereinflüsse umkehrt.

Man wird also bei Polhöhen von 60° abwärts sich im ersten Vertical schon solchen Werthen von n nähern, bei denen es keinen grofsen Unterschied mehr macht, ob man die kleinere Poldistanz aus einer gröfsern ableitet oder umgekehrt.

Unter Polhöhen von 40° dagegen wird man allerdings durch das oben erörterte Verfahren, welches von den Poldistanzen, die nahe gleich $90° - \varphi$ sind, bis zu den kleinsten Poldistanzen führt, die letzteren aus den ersteren wohl nicht mehr hinreichend frei von den Beobachtungsfehlern erhalten.

Aber für Polhöhen zwischen 40° und 60° wird man in der That mit dem Durchgangs-Instrument in der Lage sein, nicht nur von solchen fundamentalen Poldistanzen und Werthen von n ausgehend, die nahe gleich $90° - \varphi$ sind, durch allmälige Verminderung der Neigungen der Dreh-Axe des Durchgangs-Instrumentes gegen den Aequator bei Festhaltung von $i = 0$, Beziehungen jener Poldistanzen zu den kleinsten Poldistanzen herzustellen, sondern

auch unter Festhaltung von $n = 90° - \varphi$ nach der andern Seite überzugehen und Beziehungen zwischen fundamentalen Poldistanzen p_1, die nahe gleich $90° - \varphi$ sind, und gröfseren Poldistanzen p_2 herzustellen.

Wie weit man hierin gehen kann, wird die nachfolgende Zusammenstellung der Fehlerbeträge $(\varepsilon p_2)_p$ erkennen lassen, welche nach der Gleichung 10_p unter Eintragung der zugehörigen Beispiels- und Grenzwerthe von y, x und U, sowie von v aufgestellt sind, und in welcher folgende abgekürzte Bezeichnungen eingeführt sind:

$$a_p' = \frac{\operatorname{Sin} p_2}{\operatorname{Sin} n} \qquad a_p'' = \frac{\operatorname{Sin} 2p_2}{\operatorname{Sin} 2n}$$

$$b_p = \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} 2p_2 \sqrt{\frac{\operatorname{Tg}^2 p_2}{\operatorname{Tg}^2 n} - 1}$$

V. Zahlenwerthe der wahrscheinlichen Fehler $(\varepsilon p_2)_p$

$$(\varepsilon p_2)_p = \sqrt{0{,}01\,(a_p'^2 + a_p''^2) + (0{,}09 + 1{,}00 \cdot v)\, b_p^2}$$

	$n = 30°$	$n = 40°$	$n = 50°$
	"	"	"
$p_2 = n + 10°$	0,44	0,41	0,39
$p_2 = n + 20°$	0,80	0,70	0,62
$p_2 = n + 30°$	1,16	0,96	0,80

Hieraus ergiebt sich, dafs man hier unter Festhaltung derselben Genauigkeitsgrenzen, welche oben näher erörtert sind, bis zu Unterschieden $p_2 - n$ gehen kann, welche 15° erreichen. Wenn man bedenkt, dafs hier, wo $n = 90° - \varphi$ gehalten wird und somit die kleine Veränderlichkeit von n zwischen den beiden correspondirenden Durchgangsbeobachtungen des Sternes, dessen Poldistanz erheblich gröfser ist als n, durch die mefsbaren Variationen von i aus dem Gebiete der Fehler fast ganz herausgehoben und fast vollständig in Rechnung gezogen werden kann, so lassen sich die Verhältnisse wohl noch etwas günstiger ansehen, so dafs die Amplitüde der $p_2 - p_1$ nach der vom Pol abgewandten Seite hin vielleicht noch etwas gröfser als 15° bis 20° angenommen werden kann.

Sorgfältige Beobachtungen werden hierüber, sowie überhaupt bezüglich der vollen Gültigkeit aller obigen die Genauigkeitsverhältnisse betreffenden Annahmen die erfahrungsmäfsige Entscheidung geben müssen.

Man wird jedoch nach unsern Darlegungen an der Erheblichkeit und der Nothwendigkeit näherer Prüfung eines Beobachtungsverfahrens nicht zweifeln, welches in einer von den bisherigen Beobachtungen der fundamentalen Poldistanzen ganz unabhängigen Weise gute Vergleichungen zu liefern verspricht zwischen den Poldistanzen, die nahe gleich der Poldistanz des Zeniths sind, und den Poldistanzen von solchen Sternen, welche zwischen dem Pol und einem Parallelkreise enthalten sind, der noch bis 20° über das Zenith hinaus liegen kann.

Nach der Formel $dp_2 = dp_1 \frac{\mathrm{Sin}\, 2p_2}{\mathrm{Sin}\, 2p_1}$ werden gerade die kleinsten Poldistanzen von den Fehlern der bei obigem Beobachtungsverfahren durchweg zu Grunde zu legenden zenithalen Poldistanzen die man kurz als die fundamentalen dieses Beobachtungssystems bezeichnen kann, fast vollkommen unabhängig zu machen, also gewissermaafsen absolut zu bestimmen sein. Das folgende Täfelchen macht dies und die Grundlagen einiger anderen Folgerungen ersichtlich.

VI. Zahlenwerthe des Factors $\frac{\mathrm{Sin}\, 2p_2}{\mathrm{Sin}\, 2p_1}$

	$p_1 = 10^0$	$p_1 = 20^0$	$p_1 = 30^0$	$p_1 = 40^0$	$p_1 = 50^0$	$p_1 = 60^0$
$p_2 = 1^0$	0,10	0,05	0,04	0,04	0,04	0,04
$p_2 = 5^0$	0,51	0,27	0,20	0,18	0,18	0,20
$p_2 = 10^0$	1,00	0,53	0,39	0,35	0,35	0,39
$p_2 = 20^0$	1,88	1,00	0,74	0,65	0,65	0,74
$p_2 = 30^0$	2,53	1,35	1,00	0,88	0,88	1,00
$p_2 = 40^0$		1,53	1,14	1,00	1,00	1,14
$p_2 = 50^0$			1,14	1,00	1,00	1,14
$p_2 = 60^0$				0,88	0,88	1,00
$p_2 = 70^0$					0,65	0,74
$p_2 = 80^0$						0,39

Nun ist es zwar keineswegs unwichtig, für die kleinsten Poldistanzen unabhängige Bestimmungen zu erhalten, die von den Fehlern der Annahmen der ihnen zu Grunde gelegten fundamentalen Poldistanzen nur in sehr geringem Grade abhängig sind und somit eine fast absolute Controle für die mit getheilten Kreisen erlangten Werthe derselben kleinen Poldistanzen gewähren können, denn auch die äufserst genaue Kenntnifs dieser kleinen Poldistanzen hat ja grofsen praktischen Werth.

Aber im Allgemeinen bestimmen sich schon aus Ablesungen an getheilten Kreisen die kleinen Poldistanzen erheblich freier von mehreren Fehlerquellen als die gröfseren, und es wäre deshalb noch wichtiger, wenn die Durchgangsbeobachtungen eine sichere Ableitung gröfserer Poldistanzen aus den Poldistanzen der dem Pol sehr nahen Sterne liefern könnten.

Dies leisten aber die Durchgangsbeobachtungen nicht; denn sie ergeben keine blofsen Differenzen von Poldistanzen, sondern nur functionelle Beziehungen zwischen denselben, welche durch den obigen Differentialquotienten charakterisirt werden, und welche deutlich erkennen lassen, dafs die kleinen Fehler, welche in den Bestimmungen auch der kleinen p mit getheilten Kreisen noch verbleiben, in unzulässiger Weise vergröfsert auf gröfsere Poldistanzen übergehen würden, wenn wir die letzteren mit Hülfe von Durchgangsbeobachtungen aus den ersteren ableiten wollten.

Nennen wir den Factor $\frac{dp_2}{dp_1}$ der Kürze halber e_2 und bezeichnen wir auch im Folgenden die fundamentale Poldistanz mit p_1, die einzelnen aus derselben mit Hülfe von Durchgangsbeobachtungen abgeleiteten Poldistanzen mit p_2, p_3, p_4 u. s. w., entsprechend auch die Factoren $\frac{dp_3}{dp_1}$, $\frac{dp_4}{dp_1}$ mit e_3, e_4 . . .; dagegen die Werthe aller dieser Poldistanzen, wie sie aus fundamentalen Beobachtungssystemen an getheilten Kreisen hervorgehen, mit P_1, P_2, P_3, P_4 . . . und die unbekannten letzten und definitiven Correctionen dieser Werthe mit dP_1, dP_2, dP_3, dP_4 . . ., so haben wir nach dem Obigen:

$$P_1 - p_1 = o$$
$$P_2 + dP_2 - p_2 = e_2\, dP_1$$
$$P_3 + dP_3 - p_3 = e_3\, dP_1$$
$$P_4 + dP_4 - p_4 = e_4\, dP_1$$
etc.

Aus diesen Gleichungen würden sich die einzelnen dP und somit auch dP_1, aus welchem letzteren die definitiven Werthe der einzelnen Poldistanzen mittels der Ausdrücke

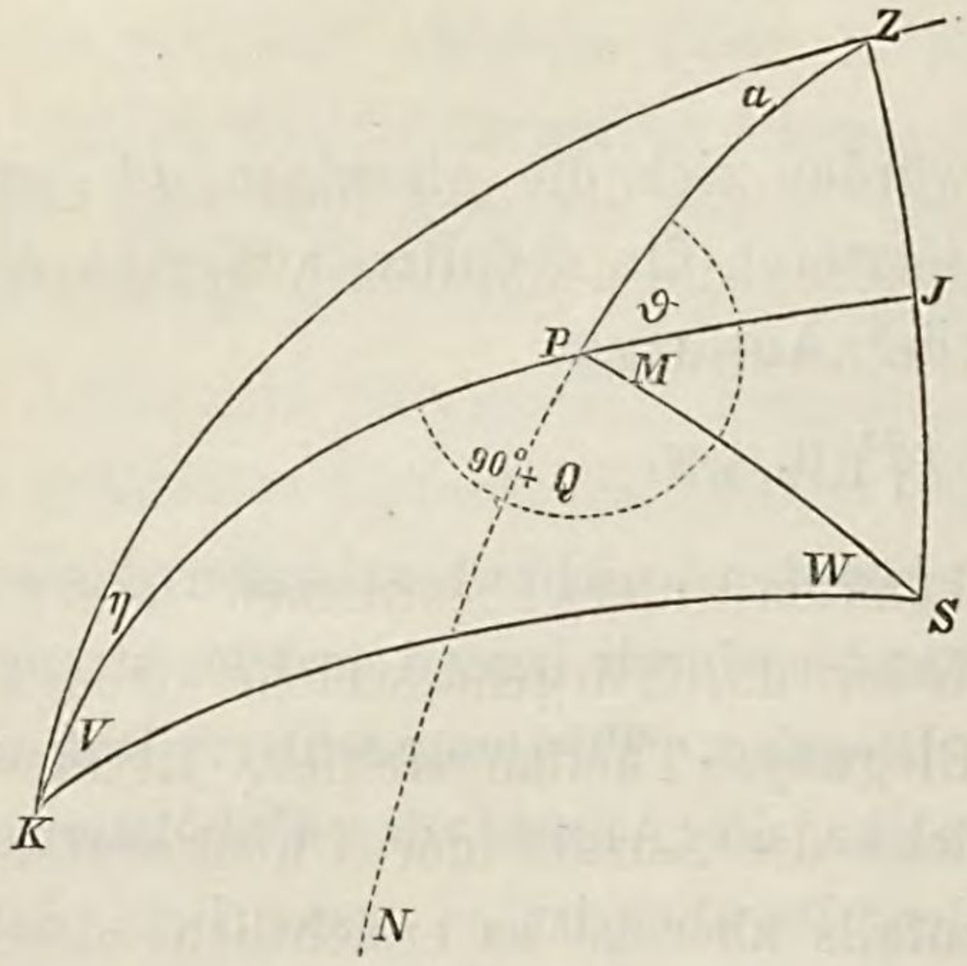
$$p_2 + e_2\, dP_1 \text{ u. s. w.}$$

unmittelbar abgeleitet werden könnten, nicht bestimmen lassen, wenn dieselben nicht unter einander durch irgend welche strenge oder approximative Theorie (Biegung, Theilungsfehler, Refraction . . .) verbunden wären, welche die Anzahl der Unbekannten zu vermindern gestattete. Jedenfalls aber ist es ersichtlich, dafs diese letzte Ausgleichung durch gute Bestimmungen der $p_2, p_3 \ldots$, welche von systematischen Fehlern möglichst frei sind, und welche somit für die Beziehungen der dP unter einander durch die Differentialquotienten e eine fast strenge Bedingung hinzufügen, wesentlich gesichert wird, so dafs hierdurch auch für die fundamentalen Poldistanzen p_1 schliefslich noch fast absolute Correctionen erlangt werden könnten.

Auch denjenigen Poldistanzen endlich, welche aufserhalb der Grenzen fallen, die nach dem Obigen den Durchgangsbeobachtungen mit Vortheil zugänglich sind, würde natürlich jene letzte Controle solcher durch Kreisablesungen bestimmten Poldistanzen P, die innerhalb jener Grenzen liegen, wesentlich zu Gute kommen.

Zum Schlufs wollen wir noch in Kürze die Gleichungen aufstellen, welche zwischen den Werthen der n und m einerseits und andererseits den Azimuthen a der Dreh-Axe des Durchgangs-Instruments, sowie der Neigung i der letzteren bestehen, sowie

die Gleichungen, welche zur Vorausberechnung der Einstellungen in den verschiedenen Lagen des Durchgangs-Instrumentes und zur Berechnung der Beobachtungen am geeignetsten erscheinen.



In nebenstehender Figur sei Z das Zenith, die übrigen Bezeichnungen dieselben, wie in den vorangehenden Figuren:

$$PZ = 90° - \varphi,$$
$$KZ = 90° - i.$$

Der Stundenwinkel von K (Winkel ZPK) ist $90° - m$, in der Figur von PZ aus im Sinne der Bewegung der Zeiger einer Uhr gezählt. Endlich sei das Azimuth von K (der Winkel PZK) in demselben Sinne von ZP (der Polseite des Meridians) anfangend gezählt und mit a bezeichnet.

Es ist dann in dem sphärischen Dreieck KPZ der Winkel KPZ gleich $m - 90°$ und wir haben zwischen n, m, i, a und φ folgende Gleichungen:

$$11) \quad -\operatorname{Cos} n \operatorname{Cos} m = \operatorname{Cos} i \operatorname{Sin} a$$
$$12) \quad \operatorname{Cos} n \operatorname{Sin} m = \operatorname{Sin} i \operatorname{Cos} \varphi - \operatorname{Cos} i \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} a$$
$$13) \quad \operatorname{Sin} n = \operatorname{Sin} i \operatorname{Sin} \varphi + \operatorname{Cos} i \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} a$$

Nach Gleichung 13 ist in der folgenden Zusammenstellung VII berechnet, welche Werthe von a unter der Voraussetzung von verschwindend kleiner Neigung i der Dreh-Axe bei den verschiedenen Polhöhen zu den Werthstufen von n gehören, die in den vorhergehenden Erörterungen zur Anwendung gekommen sind. Es ist nämlich unter jener Voraussetzung:

$$\operatorname{Cos} a = \frac{\operatorname{Sin} n}{\operatorname{Cos} \varphi}$$

VII. Zahlenwerthe des Azimuthes a der Axe, welche bei den verschiedenen Polhöhen zu bestimmten Werthen von n gehören.

	$\varphi = 60^0$	$\varphi = 50^0$	$\varphi = 40^0$	$\varphi = 30^0$	$\varphi = 20^0$
$n = 0^0$	$a = \pm 90^0$	90^0	90^0	90^0	90^0
$n = 5^0$	$a = \pm 80^0$	82^0	83^0	84^0	85^0
$n = 10^0$	$a = \pm 70^0$	74^0	77^0	78^0	79^0
$n = 15^0$	$a = \pm 59^0$	66^0	70^0	73^0	74^0
$n = 20^0$	$a = \pm 47^0$	58^0	63^0	67^0	69^0
$n = 25^0$	$a = \pm 32^0$	49^0	57^0	61^0	63^0
$n = 30^0$	$a = \pm 0^0$	39^0	49^0	55^0	58^0
$n = 35^0$	$a = \pm$	27^0	42^0	48^0	52^0
$n = 40^0$	$a = \pm$	0^0	33^0	42^0	47^0
$n = 45^0$	$a = \pm$		23^0	35^0	41^0
$n = 50^0$	$a = \pm$		0^0	28^0	35^0
$n = 55^0$	$a = \pm$			19^0	29^0
$n = 60^0$	$a = \pm$			0^0	23^0
$n = 65^0$	$a = \pm$				15^0
$n = 70^0$	$a = \pm$				0^0

Aus den Gleichungen 11, 12 und 13 ergeben sich ferner, unter denselben Voraussetzungen wie oben, in bekannter Weise durch Differenzirung folgende Beziehungen zwischen dn, dm und di, da, wenn man aus leicht ersichtlichen Gründen für $90° - \varphi$ die Bezeichnung ψ einträgt:

$$14) \qquad dn = di \cdot \frac{\mathrm{Cos}\,\psi}{\mathrm{Cos}\,n} - da \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Cos}\,n}\mathrm{Sin}\,a \ldots\ldots$$

$$15) \qquad -\mathrm{Cos}\,n \cdot dm = di \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Cos}\,n}\mathrm{Sin}\,a + da \cdot \frac{\mathrm{Cos}\,\psi}{\mathrm{Cos}\,n} \ldots\ldots$$

wo also $\mathrm{Sin}\,a = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{Sin}\,n}{\mathrm{Sin}\,\psi}\right)^2}$ ist.

Für die partiellen Differential-Quotienten $\left(\frac{dn}{di}\right)$, $\left(\frac{dn}{da}\right)$, $\left(\frac{dm}{di}\right)$, $\left(\frac{dm}{da}\right)$ findet man hiernach folgende Zusammenstellung von Zahlenwerthen:

VIII.

	$+\left(\frac{dn}{di}\right)$					$-\left(\frac{dn}{da}\right)$				
	$\varphi=60^0$	$\varphi=50^0$	$\varphi=40^0$	$\varphi=30^0$	$\varphi=20^0$	$\varphi=60^0$	$\varphi=50^0$	$\varphi=40^0$	$\varphi=30^0$	$\varphi=20^0$
$n=0^0$	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94
$n=10^0$	0,88	0,78	0,65	0,51	0,35	0,48	0,63	0,76	0,86	0,94
$n=20^0$	0,92	0,81	0,68	0,53	0,36	0,39	0,58	0,73	0,85	0,93
$n=25^0$	0,96	0,85	0,71	0,55	0,38	0,29	0,53	0,71	0,83	0,93
$n=30^0$	1,00	0,88	0,74	0,58	0,39	0,00	0,47	0,67	0,82	0,92
$n=35^0$		0,93	0,78	0,61	0,42		0,35	0,62	0,79	0,91
$n=40^0$		1,00	0,84	0,65	0,45		0,00	0,54	0,76	0,89
$n=45^0$			0,91	0,71	0,48			0,42	0,71	0,88
$n=50^0$			1,00	0,78	0,53			0,00	0,63	0,85
$n=55^0$				0,87	0,60				0,49	0,80
$n=60^0$				1,00	0,68				0,00	0,73
$n=65^0$					0,81					0,59
$n=70^0$					1,00					0,00

	$-\left(\frac{dm}{di}\right)$					$-\left(\frac{dm}{da}\right)$				
$n=0^0$	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34
$n=10^0$	0,48	0,64	0,77	0,87	0,95	0,89	0,79	0,66	0,52	0,35
$n=20^0$	0,41	0,62	0,78	0,90	0,99	0,98	0,87	0,73	0,57	0,39
$n=25^0$	0,33	0,59	0,78	0,92	1,02	1,05	0,93	0,78	0,61	0,42
$n=30^0$	0,00	0,54	0,77	0,94	1,06	1,15	1,02	0,86	0,67	0,46
$n=35^0$		0,43	0,76	0,97	1,11		1,14	0,96	0,75	0,51
$n=40^0$		0,00	0,71	0,99	1,17		1,31	1,10	0,85	0,58
$n=45^0$			0,59	1,00	1,24			1,29	1,00	0,68
$n=50^0$			0,00	0,98	1,32			1,56	1,21	0,83
$n=55^0$				0,85	1,40				1,52	1,04
$n=60^0$				0,00	1,46				2,00	1,37
$n=65^0$					1,39					1,92
$n=70^0$					0,00					2,92

Aus der Zusammenstellung dieser Zahlenwerthe in Verbindung mit den Werthen der Tafel VII geht als allgemeines Resultat hervor, daſs nicht nur im ersten Vertical selbst, sondern

auch in ziemlich weitem Azimuth-Abstande von demselben zur Bestimmung der dn die Kenntnifs von di genügt, da die kleinen Veränderungen da noch mit hinreichend kleinen Factoren auf dn wirken, wenn a auch um einige Grade von Null abweicht. In Azimuthen der Dreh-Axe, welche 10° übersteigen, würde man aber, wenn die genaue Bestimmung der dn verlangt würde, der Messung von da schon nicht mehr entbehren können.

Zur Bestimmung der Veränderlichkeit von m, welche oben in dem Fehleraggregat U nur ganz summarisch mit berücksichtigt ist, müfste man im ersten Vertical vorzugsweise genaue und vollständige Messungen von da besitzen, und auch in allen andern Azimuthen wird aus den da wenigstens ein sehr erheblicher Theil der dm hervorgehen.

Ganz zuverlässige Messungen der da durch Miren und dergl. haben nun, und besonders wenn man in sehr verschiedenen Azimuthen derartige Bestimmungen machen will, grofse Schwierigkeiten, und in diesen beruht die Hauptschwäche der oben dargelegten Methode, mit beliebigen Werthen von n zwischen $90° - \varphi$ und 0 aus Durchgangsbestimmungen die Kenntnifs von Poldistanzen zu erlangen.

Wenn man indessen erwägt, dafs auf den meisten Sternwarten auch ohne gesicherte Einrichtung zur Messung der da die Bestimmung der Rectascensions-Differenzen auf Ermittelungen von n begründet wird, welche aus correspondirenden Durchgangsbeobachtungen unter Zulassung von $M = 6^h$..... hergeleitet sind, und dafs hierbei die Rectascensionen besonders von Pol-Sternen bis auf das Zehntheil der Bogensecunde gröfsten Kreises übereinstimmend gefunden werden, so darf man bezüglich der Poldistanzbestimmungen aus Durchgangsbeobachtungen in Betracht der weit überwiegenden Schwierigkeiten der letzten Ausgleichungen von Poldistanzbestimmungen mit getheilten Kreisen auf jene Uebelstände kein zu grofses Gewicht legen.

Zur Vorbereitung derartiger Beobachtungen wird die Berechnung der Stundenwinkel und der Zenithdistanzen erforderlich, in welchen bei jedem Werthe von n die beiden correspondirenden Durchgänge eines Sternes von gegebener Poldistanz p erfolgen.

Hierfür können die folgenden Formeln dienen, in denen für den Winkel JPZ (der letzten Figur) die abgekürzte Bezeichnung $\vartheta\,(=270^\circ - m)$ eingeführt, die Zenithdistanz ZS bei dem einen Durchgange mit z', bei dem correspondirenden andern Durchgange mit z'', endlich der Stundenwinkel bei dem einen Durchgange mit τ', der Stundenwinkel bei dem correspondirenden andern Durchgange mit τ'' bezeichnet ist.

Hierbei können, wie man leicht sieht, die Werthe der τ und z mit hinreichender Sicherung für die Vorbereitung des Beobachters gefunden werden, wenn man durchweg KS gleich 90° annimmt und den Werth von c, selbst den bei Beobachtungen an den äufsersten Seitenfäden viele Bogenminuten betragenden Werth $c+f$ (wo f die Distanz des Seitenfadens vom Mittelfaden ist) auf die Annahme von n wirft, d. h. überall statt des aus der Gleichung $\mathrm{Sin}\, n = \mathrm{Cos}\, a\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi$ oder auf andere Weise aus einem p approximativ gefundenen n, entsprechend der Stelle des Gesichtsfeldes, an welcher die Beobachtung stattfinden soll, einführt $n_f = n + c + f$.

Unter der ferneren für diese Vorausberechnungen stets hinreichend gerechtfertigten Annahme $KZ = 90^\circ$ . . . hat man dann nach der Figur, welche die Sachlage bei der mit zwei Strichen bezeichneten zweiten oder späteren der beiden Durchgangsepochen darstellen soll:

$$\begin{array}{ll} z'' = \eta + V & \tau'' = \vartheta + M \\ z' = \eta - V & \tau' = \vartheta - M \end{array}$$

wo zunächst nach den Beziehungen zwischen ϑ und m und nach den Gleichungen 11 und 12:

$$\mathrm{Tg}\,\vartheta = \frac{\mathrm{Tg}\, a}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdots$$

sowie nach dem Früheren:

$$\text{Cos}\, M = \frac{\text{Tg}\, n_f}{\text{Tg}\, p} \ldots$$

wo ferner aus den Dreiecken KPS und KPZ:

$$\text{Tg}\ V = \text{Tg}\, p\ \text{Cos}\, n_f\ \text{Sin}\ M \ldots .$$

oder: $$\text{Cos}\ V = \frac{\text{Cos}\, p}{\text{Cos}\, n_f}$$

$$\text{Tg}\, \eta = \text{Cotg}\, \varphi\ \text{Sin}\, a$$

Bei der Berechnung der Durchgangsbeobachtungen endlich wird man die Ableitung von n aus den gröfseren, stärker von diesem Werthe verschiedenen Poldistanzen oder umgekehrt am Bequemsten nach den strengen Formeln (siehe oben) ausführen, dagegen bei der Berechnung der den Werth n nur wenig übersteigenden Poldistanzen aus diesem letzteren Werthe oder umgekehrt die auf pag. 53 angegebene indirecte Rechnung mit Benutzung der Kleinheit des Werthes von $\text{Sin}^2 \frac{M}{2}$ in der bekannten Weise zur Anwendung bringen.

Endlich bleibt noch zu erörtern, in welcher Weise die Messung der di und eine etwaige Messung der da bei der Berechung der Durchgangsbeobachtungen zur Verwendung kommen müfste.

Sei der Werth von n bei der vorangehenden der beiden correspondirenden Durchgangsbeobachtungen, deren Sternzeit T' ist, bezeichnet mit n', bei der zweiten, deren Sternzeit T'' ist, mit n'', ferner seien die zugehörigen Werthe der Poldistanz des beobachteten Sternes mit p' und p'', und die zugehörigen Werthe von ϑ mit ϑ' resp. ϑ'' bezeichnet, so dafs $dn = n'' - n'$ und $-dm = \vartheta'' - \vartheta'$ zu setzen ist. Dann bildet man zunächst dn und dm mittels der zwischen den Zeiten T' und T'' nach der Voraussetzung wirklich gemessenen Veränderungen di und da unter Anwendung der Gleichungen 14 und 15.

Es sei ferner zur Zeit T' die Rectascension des beobachteten Sternes gleich $\alpha' + d\alpha$, zur Zeit T'' gleich $\alpha'' + d\alpha$, wo $d\alpha$ eine

noch unbekannte kleine Verbesserung der angenommenen Werthe bedeutet.

Die zweckmäfsigste Berechnung der Beobachtungen, bei welcher zugleich einzelne Beobachtungsmomente (Faden-Antritte) auf der einen Seite, für welche keine correspondirende auf der andern Seite vorhanden sind, in bekannter Weise noch mit in Rechnung gezogen werden können, dürfte sich folgendermaafsen gestalten:

Man bildet für ϑ einen Näherungswerth aus der Gleichung

$$\mathrm{Tg}\,\vartheta_0 = \frac{\mathrm{Tg}\,a}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

wo nöthigenfalls, wenn für a selbst kein hinreichender Näherungswerth vorhanden, a aus der Gleichung $\mathrm{Cos}\,a = \frac{\mathrm{Sin}\,n}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$ zu berechnen ist.

Für die unbekannten wahren Werthe der beiden ϑ wird man dann setzen können:

$$\vartheta' = \vartheta_0 + d\vartheta$$
$$\vartheta'' = \vartheta_0 + d\vartheta - dm$$

wo $d\vartheta$ die unbekannte, im weiteren Verlauf der Rechnung zusammen mit $d\alpha$ zu eliminirende Verbesserung des Näherungswerthes ϑ_0 ist.

Man hat dann nach den obigen für die Stundenwinkel geltenden Gleichungen:

$$M' = \alpha' + \vartheta_0 - T' + (d\alpha + d\vartheta)$$
$$M'' = T'' - (\alpha'' + \vartheta_0 - dm) - (d\alpha + d\vartheta)$$

wo man dem Aggregat der unbestimmten Verbesserungen $d\alpha + d\vartheta$ auch noch einen unbekannten constanten Fehler der Uhr-Correction hinzufügen kann, so daſs dasselbe etwa die Gesammtbezeichnung $\Sigma \Delta T$ erhielte. Berechnet man jetzt die Näherungswerthe:

$$M'_0 = (\alpha' + \vartheta_0) - T'$$
$$M''_0 = T'' - (\alpha'' + \vartheta_0 - dm)$$

und aus diesen direct oder nach einer der oben erörterten für genauere Rechnung dienlichen Umformungen n'_0 und n''_0, z. B.

$$\mathrm{Tg}\, n'_0 = \mathrm{Tg}\, p' \ \mathrm{Cos}\, M'_0$$
$$\mathrm{Tg}\, n''_0 = \mathrm{Tg}\, p'' \ \mathrm{Cos}\, M''_0$$

so wird man für die wahren Werthe n' und n'' haben:

$$n' = n'_0 + \frac{dn}{dM} \Sigma \Delta T$$

$$n'' = n''_0 + \frac{dn}{dM} \Sigma \Delta T$$

Der Mittelwerth $\frac{n' + n''}{2}$ ist also, wenn man die Differentialquotienten $\frac{dn}{dM}$ in beiden Fällen als gleich annehmen kann, frei von den $\Sigma \Delta T$. Ist n veränderlich, ohne daſs seine Veränderung zwischen T' und T'' hinreichend genau bekannt ist, dann bleibt die Epoche dieses Mittelwerthes $\frac{n' + n''}{2}$ und damit das Resultat der ganzen Bestimmung entsprechend unsicher.

Mit Hülfe der Kenntniſs von $dn = n'' - n'$ aber hat man

$$\text{für die Epoche } T' \left\{ n' = \frac{n'_0 + n''_0 - dn}{2} \right.$$

$$\text{für die Epoche } T'' \left\{ n'' = \frac{n''_0 + n'_0 + dn}{2} \right.$$

Liegt die andere Aufgabe vor, aus beobachteten T' und T'' mit Hülfe von n' und $n' + dn = n''$ die Poldistanz eines Sternes zu bestimmen, so hat man mit entsprechender Benutzung der obigen Vorbereitungsrechnungen zu bilden:

$$\mathrm{Tg}\, p'_0 = \mathrm{Tg}\, n' \ \mathrm{Sec}\, M'_0$$
$$\mathrm{Tg}\, p''_0 = \mathrm{Tg}\, n'' \ \mathrm{Sec}\, M''_0$$

$$p' = p'_0 + \frac{dp}{dM} \Sigma \Delta T$$

$$p'' = p''_0 - \frac{dp}{dM} \Sigma \Delta T$$

$$\frac{p' + p''}{2} = \frac{p'_0 + p''_0}{2}$$

Da hier die Aenderung $p'' - p'$ nicht nur aus der Stern-Ephemeride bekannt ist, sondern auch zwischen T'' und T' als der Zeit proportional angenommen werden kann, hat man für die Epoche des Mittelwerthes $\frac{p' + p''}{2}$ einfach $\frac{T' + T''}{2} = T_0$.

Weiteren Eingehens auf Details der obigen Aufgaben glaube ich mich zunächst enthalten zu können.

Auch kann ein Eingehen auf die Folgerungen, welche die oben vorgeschlagene Erweiterung von Durchgangsbestimmungen auch für die Polhöhenbestimmungen zu ziehen gestattet, um so eher unterlassen werden, als die Bearbeitung dieses Gegenstandes nach den Mittheilungen auf pag. 27 und 28 des Jahresberichtes der Nikolai-Hauptsternwarte zu Pulkowa vom 11. Mai 1877 schon unabhängig in Angriff genommen und in den besten Händen ist.

II.

Ueber die Anwendung des Durchgangs-Instruments zur unabhängigen Bestimmung von Polhöhen und Poldistanzen.

Im Anschluſs an die in vorstehendem Aufsatze „Zur Theorie des Durchgangs-Instruments“ enthaltenen Darlegungen soll hier nachgewiesen werden, daſs das Durchgangs-Instrument in der erweiterten Anwendung, welche in dem erwähnten Aufsatz vorgeschlagen und näher erläutert worden ist (als Universal-Durchgangs-Instrument), auch die Grundlagen für unabhängige fundamentale Bestimmungen der Polhöhen, sowie der Poldistanzen von Himmelsobjecten zu liefern vermag.

Auf pag. 77—81 ist das Ergebnifs der vorangehenden Untersuchungen dahin zusammengefafst, dafs man mittelst eines Universal-Durchgangs-Instruments in unseren Breiten die Poldistanzen bis zum Nordpol des Himmels einerseits, sowie andererseits bis zu etwa 20° südlich vom Zenith aus den anderweitig — nämlich mit eingetheilten Kreisen — bestimmten Poldistanzen von solchen Sternen, welche den ersten Vertical nahe am Zenith passiren, mit hinreichender Sicherheit und fast ohne Einwirkung systematischer Instrumental-Fehler und Strahlenbrechungs-Einflüsse ermitteln könne, und dafs man sogar, wenn aufserdem sehr gute fundamentale Bestimmungen aller dieser Poldistanzen mit eingetheilten Kreisen vorlägen, die sämmtlichen von dem Durchgangs-Instrument zu liefernden Bedingungs-Gleichungen zwischen allen diesen Poldistanzen zu der definitiven Ausgleichung eines ganzen Systems fundamentaler Poldistanzen mit Vortheil würde verwenden können.

Die folgenden Darlegungen sollen zeigen, dafs, wenn man die Durchgänge in geeigneter Weise nicht nur im Sinne des Azimuthes, sondern auch im Sinne der Zenithdistanz beobachtet und das Instrument dabei in der Weise der Horrebow-Talcott'schen Methode mit einem Niveau verbindet, welches in identischen Zenithdistanzen zu beobachten erleichtert und sichert, man lediglich durch Zeitmessungen und Niveau-Ablesungen ohne jegliche Hinzuziehung von Beobachtungen an getheilten Kreisen, also frei von allen Theilungsfehlern und Kreisdurchbiegungen, ferner mit bedeutend vermindertem Einflufs der Biegungen des Rohrs, höchstens in Abhängigkeit von unregelmäfsigen und veränderlichen Seitenbiegungen und Fehlern der Zapfengestalten, die Polhöhen, sowie vom Pol bis zu 30° oder 38° südlich vom Zenith, also in der Breite von Berlin von 0° bis nahe 75°, fundamentale Poldistanzen bestimmen kann. Auch von der Refraction wird man dabei nicht anders abhängig werden, als durch die blofse Voraussetzung, dafs die Refraction in zwei völlig gleichen, unmittelbar nach einander in entgegengesetzten Azimuthen zu beobachtenden, 40° nicht übersteigenden Zenithdistanzen sehr nahe eine und dieselbe Wirkung ausübe.

Wir bezeichnen wieder, wie in dem erwähnten Aufsatze, die Poldistanz eines Sterns, der den ersten Vertical sehr nahe am Zenith passirt, mit p_1. Die Poldistanz eines näher dem Pol gelegenen zweiten Sterns sei mit p_2, die Poldistanz eines weiter südlich vom Zenith culminirenden dritten Sterns mit p_3 bezeichnet.

Wir haben nun (pag. 65 des erwähnten Aufsatzes) gezeigt, dafs man mittelst des Universal-Durchgangs-Instrumentes zwischen p_1, p_2 und p_3 Gleichungen von folgender Form erhalten kann:

$$\mathrm{Tg}\, p_2 = \mathrm{Tg}\, p_1 \frac{\mathrm{Cos}\, M_{1,2}}{\mathrm{Cos}\, M_2}$$

und ebenso

$$\mathrm{Tg}\, p_3 = \mathrm{Tg}\, p_1 \frac{\mathrm{Cos}\, M_{1,3}}{\mathrm{Cos}\, M_3}$$

wo die $M_{1,2}$ M_2 und $M_{1,3}$ M_3 aus blofsen Durchgangsbeobachtungen und Zeitmessungen hervorgehende Winkel sind; dafs ferner, wenn man den noch unbekannten wahren Werth von p_1 aus einem bekannten Näherungswerth p_1^0 und einer unbekannten kleinen Verbesserung des letzteren dp_1 zusammensetzt, man nach obigen Gleichungen p_2 und p_3 in folgender Form darstellen kann:

$$1) \qquad p_2 = p_1^0 + u_2 + dp_1 \frac{\mathrm{Sin}\, 2p_2}{\mathrm{Sin}\, 2p_1} \ldots .$$

$$2) \qquad p_3 = p_1^0 + u_3 + dp_1 \frac{\mathrm{Sin}\, 2p_3}{\mathrm{Sin}\, 2p_1} \ldots .$$

wo u_2 und u_3 bekannte Functionen von p_1^0, $M_{1,2}$ und M_2, beziehungsweise von p_1^0, $M_{1,3}$ und M_3 sind.

Ganz ebenso hat man zwischen der Poldistanz des Zeniths $90° - \varphi$ oder ψ und der Poldistanz p_1 unter Voraussetzung der genau horizontalen Lage der Axe des Instrumentes u. s. w. die Gleichung, in welcher bekanntlich das Cos M im Zähler $= 1$ wird:

$$\mathrm{Tg}\, p_1 = \mathrm{Tg}\, \psi\, \mathrm{Sec}\, M_1$$

und wenn man das unbekannte ψ ebenfalls in der Form eines bekannten Näherungswerthes ψ_0 und einer unbekannten kleinen Verbesserung $d\psi$ einführt, auch:

3) $$p_1^0 + dp_1 = \psi_0 + u_1 + d\psi \frac{\text{Sin } 2p_1}{\text{Sin } 2\psi} \ldots .$$

wo u_1 eine bekannte Function von ψ_0 und M_1 ist und aufserdem die Neigung der Rotationsaxe gegen den Horizont enthält.

Trägt man die Gleichung 3 in die Gleichungen 1 und 2 ein so erhält man, wenn man zugleich den Näherungswerth p_1^0 als das Ergebnifs eines Beobachtungswerthes u_1 und des Näherungswerthes ψ_0 annimmt, also setzt

$$p_1^0 = \psi_0 + u_1 \text{ und } dp_1 = d\psi \frac{\text{Sin } 2p_1}{\text{Sin } 2\psi}$$

4) $$p_2 = \psi_0 + u_1 + u_2 + d\psi \frac{\text{Sin } 2p_2}{\text{Sin } 2\psi} \ldots .$$

5) $$p_3 = \psi_0 + u_1 + u_3 + d\psi \frac{\text{Sin } 2p_3}{\text{Sin } 2\psi} \ldots .$$

Sind nun p_2 und p_3 so ausgewählt, dafs bis auf wenige Secunden ihr Mittelwerth gleich ψ ist, kann man also setzen

6) $$\psi_0 + d\psi = \tfrac{1}{2}[p_2 + p_3] + u_4$$

und annehmen, dafs u_4 die mit Hülfe eines geeigneten und in geeigneter Weise mit dem Fernrohr verbundenen Niveaus sehr genau und frei von systematischen Fehlern abgelesene halbe Differenz der Meridian-Zenithdistanzen für die beiden Poldistanzen p_2 und p_3 ist, so ergiebt die Verbindung von Gleichung 6 mit 4 und 5

$$d\psi = u_1 + \tfrac{1}{2}[u_2 + u_3] + u_4 + \tfrac{1}{2} d\psi \left(\frac{\text{Sin } 2p_2 + \text{Sin } 2p_3}{\text{Sin } 2\psi} \right) \ldots .$$

woraus endlich zur unabhängigen Bestimmung von $d\psi$ folgt:

7) $$d\psi = \frac{\text{Sin } 2\psi}{\text{Sin } 2\psi - \tfrac{1}{2}[\text{Sin } 2p_2 + \text{Sin } 2p_3]} \left\{ u_1 + u_4 + \tfrac{1}{2}[u_2 + u_3] \right\} \ldots .$$

Man erkennt hieraus, dafs auf dem angegebenen Wege in der That eine unabhängige Bestimmung der Polhöhe aus blofsen Durchgangs-Beobachtungen und Zeitmessungen mit Niveau-Ablesungen möglich ist, und die Gleichungen 3, 4, 5 zeigen, wie alsdann auch die fundamentale Bestimmung der Poldistanzen p_1, p_2 und p_3 gesichert ist, während zugleich die Bestimmung aller

übrigen zwischen ihnen enthaltenen Poldistanzen durch Beobachtungen von lediglich derselben Art möglich ist.

Es kommt nun darauf an, zu zeigen, welche Genauigkeit man auf diesem Wege erreichen, und ob danach eine solche Methode der Bestimmung fundamentaler Poldistanzen sich dem bisherigen Verfahren an die Seite stellen kann.

Für diesen Nachweis ist es zunächst erforderlich, sich von dem numerischen Werth des Factors

$$\frac{\mathrm{Sin}\,2\psi}{\mathrm{Sin}\,2\psi - \frac{1}{2}\left[\mathrm{Sin}\,2p_2 + \mathrm{Sin}\,2p_3\right]}$$

den wir kurz mit w bezeichnen wollen, Rechenschaft zu geben.

Man sieht sofort, dafs, da ψ_0, p_2 und p_3 stets kleiner sind als 90°, der Minimalwerth des Factors w höchstens dann nahe an 1 kommen kann, wenn p_2 nahe gleich Null und p_3 zugleich nahe gleich 90° ist. Dieser Minimalwerth kann nach den obigen Voraussetzungen nur in der Nähe der Polhöhe 45° erreicht werden. Aber auch in anderen Breiten wird man sich dem Minimalwerthe $w = 1$, ohne anderweitige Vortheile ganz aufzugeben, soweit nähern können, dafs der Factor w nicht mehr solche Vergröfserungen der in den Werthen u_1, u_2, u_3, u_4 enthaltenen Beobachtungsfehler verursachen wird, welche in Betracht der anderweitig erreichbaren Genauigkeiten als unzulässig gelten müfsten.

Wenn man — zunächst nur zum Zwecke der Abschätzung des allgemeinen Einflusses der Werthe des Coefficienten w — in dem Ausdrucke desselben unter Vernachlässigung der kleinen Gröfse u_4 näherungsweise einführt:

$$\psi - p_2 = p_3 - \psi = D \ldots .$$

so sieht man leicht, dafs der Ausdruck w den folgenden Näherungswerth annimmt:

$$w = \frac{1}{2\ \mathrm{Sin}^2 D}$$

Hiernach hat man folgende Reihe von Zahlenwerthen von w für alle in Frage kommenden Polhöhen, für welche die betreffenden Werthe von D noch möglich sind:

für $D = 10°$	$w = \frac{1}{2 \operatorname{Sin}^2 D} = 16{,}58$
„ $= 15°$	„ = „ = 7,46
„ $= 20°$	„ = „ = 4,27
„ $= 25°$	„ = „ = 2,80
„ $= 30°$	„ = „ = 2,00
„ $= 35°$	„ = „ = 1,52
„ $= 40°$	„ = „ = 1,21

Um nun zu beurtheilen, welche Bedeutung diese Werthe von w haben, wird man untersuchen müssen, mit welchem Genauigkeitsgrade die einzelnen Beobachtungswerthe u_1, u_2, u_3, u_4 in der Gleichung

$$8) \qquad d\psi = \frac{1}{2 \operatorname{Sin}^2 D}\left\{u_1 + u_4 + \tfrac{1}{2}\left[u_2 + u_3\right]\right\}$$

nach dem oben erörterten Verfahren bestimmt werden können.

Was zunächst u_1 betrifft, so kann man nach den veröffentlichten Beobachtungsreihen für $\psi - p$ (oder $\varphi - \delta$) von Zenithsternen annehmen, dafs sich der wahrscheinliche Fehler dieses aus Durchgangsbeobachtungen im ersten Vertical und Nivellirungen der Rotationsaxe des Instruments sich zusammensetzenden Werthes für eine einzelne vollständige Bestimmung sicher auf $0''{,}10$ einschränken läfst.

Dasselbe wird man bei guten instrumentalen Einrichtungen und gehöriger Vervielfältigung der mikrometrischen Einstellungen während eines und desselben Durchganges — besonders bei einem gebrochenen, leicht und sicher umlegbaren Instrumente, bei welchem das bezügliche Querniveau sehr günstig an der Axe angebracht werden kann — für u_4 annehmen können.

Dagegen werden die Unsicherheiten der Bestimmung von $\frac{1}{2}$ $[u_2 + u_3]$ erheblicher und nicht unabhängig von D sein, vielmehr im allgemeinen mit zunehmenden Werthe von D wachsen und dadurch unter ungünstigen Umständen das ganze obige Ermittelungsverfahren von $d\psi$ illusorisch machen können.

Auf pag. 68 ff. sind bereits die wahrscheinlichen Unsicherheiten der Bestimmungen von u_2 und u_3 unter der Form eines εp_2 erörtert worden; indessen ist dies dort nur summarisch und ohne gewisse feinere Unterscheidungen geschehen, weil für die an jener Stelle erörterten Aufgaben eine weniger eingehende Untersuchung des Einflusses der Fehlerquellen schon genügte, um zu zeigen, dafs diese Aufgaben durch die Anwendung des Durchgangs-Instruments mit einer Genauigkeit zu lösen sein würden, die sich wohl mit der Genauigkeit der Bestimmungen an getheilten Kreisen messen könnte.

Bei der vorliegenden Aufgabe dagegen, wo es sich um eine noch vollständigere und entsprechend wichtigere Verwerthung der Durchgangsbeobachtungen handelt, wird diese Untersuchung etwas erschöpfender zu führen sein.

An der erwähnten Stelle der vorangehenden Abhandlung sind die blofsen zufälligen Beobachtungsfehler, welche bei der Ermittelung der Winkel $M\,(=90^\circ - Q)$ begangen werden, noch combinirt worden mit denjenigen auf pag. 66 unter dem Ausdruck U zusammengefafsten, die Ermittelung der Winkel M verfälschenden Einflüssen, welche von den Unvollkommenheiten der Zeitmessungen und der Veränderlichkeit der Stellung der Rotationsaxe des Instruments zur Erdaxe herrühren.

Strenger genommen aber dürfen die beiden letzteren Einflüsse nur zum kleineren Theil als Gröfsen von der Wirkungsart der zufälligen Fehler, sie müssen vielmehr bei guten instrumentalen Einrichtungen und bei vorsichtiger Bewahrung derselben vor partiellen und acuten Temperatur-Einflüssen als unbekannte Gröfsen behandelt werden, welche im allgemeinen nur von der täglichen und jährlichen Wärmeperiode abhängig sind, sich also mit grofser Annäherung als periodische Functionen der Sonnenzeit einführen, danach empirisch mit in Rechnung ziehen und bei gehöriger cyklischer Vollständigkeit des Beobachtungsmaterials fast vollständig eliminiren lassen.

Wir wollen daher zunächst nur den Einfluſs der zufälligen

Fehler der Beobachtungen auf die u_2 und u_3 ermitteln und sodann den Einfluſs der Nichterfüllung der wesentlichen instrumentalen Voraussetzungen in Function von gewissen unbekannten Gröſsen in die Gleichung für $d\psi$ einführen.

Bezeichnen wir die oben bereits numerisch erörterten wahrscheinlichen Beobachtungsfehler der Gröſsen u_1 und u_4 mit εu_1 resp. mit εu_4, die wahrscheinlichen Fehler von u_2 und u_3, wie sie aus den sämmtlichen zufälligen Beobachtungsfehlern hervorgehen, die bei der Ermittelung der Werthe von u_2 und u_3 von Einfluſs sind, mit εu_2 resp. mit εu_3, endlich den aus allen diesen Beobachtungsfehlern hervorgehenden wahrscheinlichen Fehler, mit welchem eine Bestimmung von $d\psi$ nach der Gleichung 8 behaftet ist, mit $\varepsilon(d\psi)$, so besteht die Gleichung:

$$9) \qquad \varepsilon(d\psi) = \frac{1}{2\,\mathrm{Sin}^2 D}\sqrt{(\varepsilon u_1)^2 + (\varepsilon u_4)^2 + \tfrac{1}{4}(\varepsilon u_2)^2 + \tfrac{1}{4}(\varepsilon u_3)^2}$$

Was nun die $(\varepsilon u_2)^2$ und $(\varepsilon u_3)^2$ betrifft, so sind dieselben, allgemein betrachtet, folgendermaſsen zusammengesetzt:

$$(\varepsilon u_2)^2 = \left(\frac{du_2}{dM_{1,2}}\right)^2 (\varepsilon M_{1,2})^2 + \left(\frac{du_2}{dM_2}\right)^2 (\varepsilon M_2)^2 + \left(\frac{du_2}{dp_1^{\,0}}\right)^2 (\varepsilon p_1^{\,0})^2$$

$$(\varepsilon u_3)^2 = \left(\frac{du_3}{dM_{1,3}}\right)^2 (\varepsilon M_{1,3})^2 = \left(\frac{du_3}{dM_3}\right)^2 (\varepsilon M_3)^2 + \left(\frac{du_3}{dp_1^{\,0}}\right)^2 (\varepsilon p_1^{\,0})^2$$

wo $\varepsilon M_{1,2}$, εM_2, $\varepsilon M_{1,3}$, εM_3 die wahrscheinlichen Fehler sind, mit welchen die Beobachtungen der betreffenden M behaftet sind, wo ferner $\varepsilon p_1^{\,0}$ den wahrscheinlichen Fehler bedeutet, mit welchem die Bestimmung $p_1^{\,0} = \psi_0 + u_1$ in Folge des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers von u_1 behaftet ist, so daſs $\varepsilon p_1^{\,0} = \varepsilon u_1$, und wo endlich die $\left(\frac{du}{dM}\right)$ und $\left(\frac{du}{dp_1^{\,0}}\right)$ die partiellen Differentialquotienten der Functionen:

$$u_2 = F_2\,[M_{1,2}\;\; M_2\, p_1^{\,0}]$$

und

$$u_3 = F_3\,[M_{1,3}\;\; M_3\, p_1^{\,0}]$$

nach den Variabeln M und nach der, hier lediglich wegen des Beobachtungsfehlers εu_1, auch als Variable einzuführenden Gröſse $p_1^{\,0}$ sind.

Mit Rücksicht auf die Identität von εp_1^0 und εu_1 mufs nun aber die vorstehende Gleichung für $\varepsilon(d\psi)$ folgendermaafsen modificirt werden:

$$\varepsilon(d\psi) = \frac{1}{2\,\mathrm{Sin}^2\,D}\Bigg\{\sqrt{\begin{aligned}&(\varepsilon u_1)^2\left\{1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{du_2}{dp_1^0}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{du_3}{dp_1^0}\right)\right\}^2+(\varepsilon u_4)^2\\&+\tfrac{1}{4}\left\{\left(\frac{du_2}{dM_{1,2}}\right)^2(\varepsilon M_{1,2})^2+\left(\frac{du_2}{dM_2}\right)^2(\varepsilon M_2)^2\right\}\\&+\tfrac{1}{4}\left\{\left(\frac{du_3}{dM_{1,3}}\right)^2(\varepsilon M_{1,3})^2+\left(\frac{du_3}{dM_3}\right)^2(\varepsilon M_3)^2\right\}\end{aligned}}\Bigg\}^2$$

Die Ausdrücke $\frac{du_2}{dp_1^0}$ und $\frac{du_3}{dp_1^0}$, in welchen man für u_2 und u_3 beziehungsweise $p_2^0 - p_1^0$ und $p_3^0 - p_1^0$ schreiben kann, ergeben sich hiernach

$$\frac{du_2}{dp_1^0} = \frac{dp_2^0}{dp_1^0} - 1 \qquad \frac{du_3}{dp_1^0} = \frac{dp_3^0}{dp_1^0} - 1$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\,2p_2^0}{\mathrm{Sin}\,2p_1^0} - 1 \qquad = \frac{\mathrm{Sin}\,2p_3^0}{\mathrm{Sin}\,2p_1^0} - 1$$

wo endlich mit hinreichender Genauigkeit eingetragen werden kann:

für p_1^0 . . . . ψ
für p_2^0 . . . . $\psi - D$
für p_3^0 . . . . $\psi + D$

Für die in die Parenthese eingeschlossene Reihe der die Beobachtungsfehler der M enthaltenden Glieder kann ohne weiteres, wovon man sich leicht überzeugt, die Summe der beiden Ausdrücke 10_n und 10_p auf pag. 68 und 69 eingetragen werden, wenn man in denselben die U_1 und U_2 enthaltenden Glieder wegläfst, ferner:

in 10_n statt n einführt p_2 oder $\psi - D$
statt p_1 . . . . . ψ
und in 10_p statt n einführt . . . ψ
statt p_2 „ p_3 oder $\psi + D$

Man erhält dann für $\varepsilon(d\psi)$ folgenden vollständigen Ausdruck, in welchem:

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{Tg}^2\,\psi}{\mathrm{Tg}^2\,(\psi-D)}-1\right)\mathrm{Sin}^2\,2(\psi-D)\;\text{in}\;\frac{\mathrm{Sin}\,D\,\mathrm{Sin}\,(2\psi-D)\,\mathrm{Cos}^2(\psi-D)}{\mathrm{Cos}^2\,\psi}$$

und

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{Tg}^2\,(\psi+D)}{\mathrm{Tg}^2\,\psi}-1\right)\mathrm{Sin}^2\,2(\psi+D)\;\text{in}\;\frac{\mathrm{Sin}\,D\,\mathrm{Sin}\,(2\psi+D)\,\mathrm{Sin}^2\,(\psi+D)}{\mathrm{Sin}^2\,\psi}$$

umgeschrieben und der Einfachheit halber $H_1 = H_2 = H$ gesetzt ist:

$$\varepsilon(d\psi)=\frac{1}{2\mathrm{Sin}^2 D}\sqrt{\begin{array}{l}(\varepsilon u_1)^2\,\mathrm{Cos}^2\,2D+(\varepsilon u_4)^2\\ +\tfrac{1}{4}\dfrac{x^2}{H}\mathrm{Sin}\,D\left\{\mathrm{Sin}(2\psi-D)\dfrac{\mathrm{Cos}^2(\psi-D)}{\mathrm{Cos}^2\psi}+\mathrm{Sin}(2\psi+D)\dfrac{\mathrm{Sin}^2(\psi+D)}{\mathrm{Sin}^2\,\psi}\right\}\\ +\tfrac{1}{4}\dfrac{y^2}{H}\left\{1+\dfrac{\mathrm{Cos}^2(\psi-D)}{\mathrm{Cos}^2\,\psi}+\dfrac{\mathrm{Sin}^2(\psi+D)}{\mathrm{Sin}^2\,\psi}+\dfrac{\mathrm{Sin}^2 2(\psi+D)}{\mathrm{Sin}^2\,2\psi}\right\}\end{array}}$$

oder wenn wir zur Abkürzung:

$$\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,D\left\{\mathrm{Sin}\,(2\psi-D)\,\frac{\mathrm{Cos}^2\,(\psi-D)}{\mathrm{Cos}^2\,\psi}+\mathrm{Sin}\,(2\psi+D)\,\frac{\mathrm{Sin}^2\,(\psi+D)}{\mathrm{Sin}^2\,\psi}\right\}\text{mit}\;a$$

$$\tfrac{1}{4}\left\{1+\frac{\mathrm{Cos}^2\,(\psi-D)}{\mathrm{Cos}^2\,\psi}+\frac{\mathrm{Sin}^2\,(\psi+D)}{\mathrm{Sin}^2\,\psi}+\frac{\mathrm{Sin}^2\,2(\psi+D)}{\mathrm{Sin}^2\,2\psi}\right\}\text{mit}\;b$$

bezeichnen:

10) $$\varepsilon(d\psi)=\frac{1}{2\,\mathrm{Sin}^2\,D}\sqrt{(\varepsilon u_1)^2\,\mathrm{Cos}^2\,2D+(\varepsilon u_4)^2+a\,\frac{x^2}{H}+b\,\frac{y^2}{H}}$$

Für $\frac{x}{\sqrt{H}}$ und $\frac{y}{\sqrt{H}}$ haben wir auf pag. 70 nachgewiesen, dafs man keine zu günstige Annahme machen wird, wenn man setzt:

$$\frac{x}{\sqrt{H}}=0''{,}30 \qquad \frac{y}{\sqrt{H}}=0''{,}10$$

Nachdem wir oben auch für εu_1 und εu_4 numerische Näherungswerthe angegeben haben, wird es hiernach, wenn wir eine Vorstellung von den numerischen Werthen von $\varepsilon(d\psi)$ erhalten wollen, zunächst erforderlich sein, für die in Frage kommenden Werthe von ψ und D eine Uebersicht der numerischen Werthe von $\mathrm{Cos}^2\,2D$, a und b, zu geben:

Tafel I.

	Werthe von $\text{Cos}^2 2D$	Werthe des Coefficienten a				Werthe des Coefficienten b				
		$\psi=30$	$\psi=40$	$\psi=50$	$\psi=60$	$\psi=30$	$\psi=40$	$\psi=50$	$\psi=60$	
$D=15^0$	0,75	0,18	0,19	0,19	0,18	1,38	1,23	1,16	1,14	$D=15^0$
„ $=20^0$	0,59	0,27	0,26	0,26	0,27	1,48	1,27	1,18	1,20	„ $=20^0$
„ $=25^0$	0,41	0,36	0,34	0,34	0,36	1,55	1,30	1,21	1,26	„ $=25^0$
„ $=30^0$	0,25	0,46	0,41	0,41	0,46	1,58	1,30	1,23	1,33	„ $=30^0$
„ $=35^0$	0,12		0,46	0,46			1,30	1,25		„ $=35^0$
„ $=40^0$	0,03		0,50	0,50			1,29	1,26		„ $=40^0$

Hiernach sind mit Eintragung obiger Zahlenwerthe für εu_1, εu_4, $\frac{x}{\sqrt{H}}$ und $\frac{y}{\sqrt{H}}$ etwa folgende Werthe des wahrscheinlichen Fehlers $\varepsilon(d\psi)$, soweit derselbe von den zufälligen Beobachtungsfehlern abhängt, zu erwarten.

Tafel II.

Werthe des wahrscheinlichen Fehlers $\varepsilon(d\psi)$

	$\psi = 30^0$	$\psi = 40^0$	$\psi = 50^0$	$\psi = 60^0$
	"	"	"	"
bei $D = 15^0$	1,63	1,61	1,60	1,59
„ $= 20^0$	1,00	0,98	0,97	0,98
„ $= 25^0$	0,70	0,67	0,67	0,68
„ $= 30^0$	0,53	0,50	0,50	0,52
„ $= 35^0$		0,39	0,39	
„ $= 40^0$		0,32	0,32	

Hieraus kann man ersehen, dafs man z. B. in der Polhöhe von Berlin für $\psi = 37^\circ 5$ durch die vorgeschlagene Beobachtung von 3 Sternen, deren Poldistanzen der Reihe nach betragen:

$$p_2 = 1^\circ 5 \qquad p_1 = 37^\circ 5 \qquad p_3 = 73^\circ 5$$

zunächst die Polhöhe aus einer einzelnen vollständigen Bestimmung, soweit es sich um blofse zufällige Beobachtungsfehler handelt, mit einem wahrscheinlichen Fehler von etwa $0''38$ ermitteln

kann, also mit einer Genauigkeit, welche von der Genauigkeit einer einzelnen absoluten Polhöhen-Bestimmung, wie sie durch Beobachtung der beiden Culminations-Zenithdistanzen eines Circumpolarsterns mit einem getheilten Kreise, soweit es sich auch hier nur um die zufälligen Beobachtungsfehler einschliefslich der zufälligen Unsicherheiten der einzelnen berechneten Werthe der Strahlenbrechung handelt, keinesfalls übertroffen wird.

Es bleibt noch nachzuweisen, dafs auch die systematischen Unsicherheiten einer fundamentalen Polhöhen-Bestimmung aus bloſsen Durchgangs-Beobachtungen nicht erheblich gröſser und dabei vielleicht mit geringerer Mühe und gröſserer Sicherheit zu eliminiren oder in Rechnung zu stellen sind, als die systematischen Unsicherheiten der Beobachtungen von Zenithdistanzen mit getheilten Kreisen (Theilungsfehler, Biegungen, Strahlenbrechungen).

Vorher dürfte es noch von Interesse sein, auch die Ausdrücke der wahrscheinlichen Fehler anzugeben, welche bei der Bestimmung der drei fundamentalen Poldistanzen p_1, p_2, p_3 nach dem obigen Verfahren erreichbar sind, soweit es sich nur um die eigentlichen Beobachtungsfehler handelt, welche bei meinen entsprechenden Untersuchungen in dem vorangehenden Aufsatze mit einem Theile der systematischen Fehler vermischt geblieben sind.

Zugleich bemerke ich noch, dafs der obige Ausdruck für $\varepsilon(d\psi)$ eine kleine, leicht auszuführende Abänderung für den Fall erfahren müfste, dafs die Durchgangs-Beobachtung des Sternes mit der Poldistanz p_1, welche das u_1 liefert, auch bei der Bestimmung von u_3 unmittelbare Verwendung findet. Bei der Bestimmung von u_2 ist dies dadurch ausgeschlossen, dafs diese bei $n = \psi - D$ stattfinden mufs. Es soll jedoch hier und im folgenden von der Erörterung dieser kleinen Complication Abstand genommen werden. Die Vermeidung derselben ist auch oben dadurch ausgedrückt, dafs das der Gleichung 3 zu Grunde liegende M zur Unterscheidung von $M_{1,3}$ mit M_1 bezeichnet ist.

Der wahrscheinliche Fehler von p_1, bezeichnet mit εp_1, setzt sich nach den vorangehenden Erörterungen, da:

$p_1 = p_1^0 + d\psi \frac{\mathrm{Sin}\, 2p_1}{\mathrm{Sin}\, 2\psi}$ . . . und $\varepsilon p_1^0 = \varepsilon u_1$, sowie $\frac{\mathrm{Sin}\, 2p_1}{\mathrm{Sin}\, 2\psi} = 1$ . . . in folgender Weise zusammen:

$$\varepsilon p_1 = \sqrt{(\varepsilon u_1)^2 \left(1 + \frac{dd\psi}{du_1}\right)^2 + [\varepsilon(d\psi)]^2 - \left(\frac{dd\psi}{du_1} \varepsilon u_1\right)^2}$$

Nach Gleichung 10 ist mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der u_2 und u_3 von u_1 anzusetzen $\frac{dd\psi}{du_1} = \frac{\mathrm{Cos}\, 2D}{2\,\mathrm{Sin}^2 D} = \frac{1}{2\,\mathrm{Sin}^2 D} - 1$ hiernach:

11) $$\varepsilon p_1 = \frac{1}{2\,\mathrm{Sin}^2 D} \sqrt{(\varepsilon u_1)^2 + (\varepsilon u_4)^2 + a \frac{x^2}{H} + b \frac{y^2}{H}}$$

Dieser Ausdruck läfst erkennen, dafs εp_1 unter gehörig günstigen Verhältnissen nur um wenige Hundertel Secunden gröfser sein wird als $\varepsilon(d\psi)$.

Für εp_2 und εp_3 findet man folgende Relationen:

$$\varepsilon p_2 = \sqrt{\left(\frac{dp_2}{dp_1}\right)^2 (\varepsilon p_1)^2 + \left(\frac{dp_2}{dM_{1,2}}\right)^2 (\varepsilon M_{1,2})^2 + \left(\frac{dp_2}{dM_2}\right)^2 (\varepsilon M_2)^2}$$

$$\varepsilon p_3 = \sqrt{\left(\frac{dp_3}{dp_1}\right)^2 (\varepsilon p_1)^2 + \left(\frac{dp_3}{dM_{1,3}}\right)^2 (\varepsilon M_{1,3})^2 + \left(\frac{dp_3}{dM_3}\right)^2 (\varepsilon M_3)^2}$$

Hier können für die Glieder, welche die εM enthalten, die Ausdrücke für εp_2 aus den Gleichungen 10_n und 10_p von pag. 68 und 69 mit Weglassung der U und mit denselben Einführungen, welche oben schon erörtert sind, benutzt werden. Man hat somit:

$$(\varepsilon p_2)^2 + \frac{\mathrm{Sin}^2 2(\psi - D)}{\mathrm{Sin}^2 2\psi} (\varepsilon p_1)^2 + \frac{x^2}{H} \mathrm{Sin}\, D\, \mathrm{Sin}\,(2\psi - D) \frac{\mathrm{Cos}^2 (\psi - D)}{\mathrm{Cos}^2 \psi} + \frac{y^2}{H} \left(\frac{\mathrm{Cos}^2 (\psi - D)}{\mathrm{Cos}^2 \psi} = 1\right)$$

$$(\varepsilon p_3)^2 \pm \frac{\mathrm{Sin}^2 2(\psi + D)}{\mathrm{Sin}^2 2\psi} (\varepsilon p_1)^2 + \frac{x^2}{H} \mathrm{Sin}\, D\, \mathrm{Sin}\,(2\psi + D) \frac{\mathrm{Sin}^2 (\psi + D)}{\mathrm{Sin}^2 \psi} + \frac{y^2}{H} \left(\frac{\mathrm{Sin}^2 (\psi + D)}{\mathrm{Sin}^2 \psi} + \frac{\mathrm{Sin}^2 2(\psi + D)}{\mathrm{Sin}^2 2\psi}\right)$$

Die Werthe, die sich hieraus für εp_2 und εp_3 unter Eintra-

gung der im vorhergehenden angenommenen Beträge von εp_1 und von $\frac{x^2}{H}$ und $\frac{y^2}{H}$ ergeben, sind in folgenden beiden Täfelchen III. und IV. enthalten, die mit Rücksicht auf die Ergebnisse der vorangehenden Untersuchungen sich auf Werthe von D, die gröfser sind als 20°, beschränken.

Tafel III.

Werthe von εp_2.

	$\psi=30^0$	$\psi=40^0$	$\psi=50^0$	$\psi=60^0$
	"	"	"	"
$D=25^0$	0,27	0,45	0,63	0,86
„ $=30^0$	0,23	0,34	0,49	0,69
„ $=35^0$		0,31	0,43	
„ $=40^0$		0,30	0,41	

Tafel IV.

Werthe von εp_3.

	$\psi=30^0$	$\psi=40^0$	$\psi=50^0$	$\psi=60^0$
	"	"	"	"
$D=25^0$	0,88	0,63	0,44	0,25
„ $=30^0$	0,69	0,48	0,33	0,21
„ $=35^0$		0,42	0,29	
„ $=40^0$		0,40	0,28	

Man erkennt hieraus deutlicher als aus den Ausführungen im vorangehenden Aufsatze, wie günstig bei dieser Art der Bestimmungen von fundamentalen Poldistanzen die Sache hinsichtlich der bloſsen zufälligen Beobachtungsfehler liegt.

Zugleich zeigen die Tafeln III. und IV. in Verbindung mit Tafel II., daſs die Werthe von ψ zwischen 35° und 50°, also die Polhöhen zwischen 55° und 40°, die günstigsten zur Bestimmung von absoluten Polhöhen und zugleich von absoluten Poldistanzen zwischen 0° und 80° mittelst alleiniger Anwendung des Durchgangs-Instrumentes sind.

Zur Untersuchung der systematischen Fehlereinflüsse, von denen wir hier nur die, einer besonderen directen Untersuchung zugänglichen und bekanntlich in sehr engen Grenzen zu haltenden, Fehler der Zapfengestalten, welche sorgfältig in gesonderte Rechnung zu stellen sein werden, ausschlieſsen, kann man im Anschluſs an die Erörterungen auf pag. 86 zunächst schematisch für jedes M die folgenden Relationen einführen:

$$M' = \alpha' + \vartheta - T'$$
$$M'' = T'' - \alpha'' - \vartheta$$

$$M = \frac{M' + M''}{2} = \tfrac{1}{2}\,[T'' - T' - (\alpha'' - \alpha')]$$

wo T'' und T' die beiden beobachteten Durchgangs-Sternzeiten, welche zur Bestimmung eines M dienen, und α'' und α' die zugehörigen Rectascensionen des beobachteten Sterns sind.

Wenn nun aber weder die Messungen der Sternzeiten durch die Uhren vollkommen genau sind, noch die Lage der Rotationsaxe des Fernrohrs nach Poldistanz $(90° - n)$ und nach Stundenwinkel $(90° - m)$ unveränderlich ist, vielmehr zu setzen ist:

im Zeitpunkte T'	für $n \ldots n' = n^0 - dn'$ für $m \ldots m' = m^0 - dm'$, hiernach für $\vartheta \ldots \vartheta' = \vartheta^0 + dm''$
	für T' selbst $\quad T' + d\triangle U'$
im Zeitpunkte T''	für $n \ldots n'' = n^0 - dn''$ für $m \ldots m'' = m^0 - dm''$, hiernach für $\vartheta \ldots \vartheta'' = \vartheta^0 + dm''$
	für T'' selbst $\quad T'' + d\triangle U''$

so wird man die zur Reinigung der beobachteten Werthe M von den Veränderungen dn', dn'', dm', dm'' und von den $d\triangle U'$ und $d\triangle U''$ erforderlichen Gleichungen leicht aufstellen können. Dieselben werden dann gleichzeitig zur Reduction der beobachteten Werthe der M auf eine bestimmte, durch m^0 und n^0 ausgedrückte Lage der Rotationsaxe dienen, welche bei den miteinander zu verbindenden Werthen M für verschiedene Sterne die gemeinsame Grundlage bilden soll, und welche somit die in den obigen Formeln während der Dauer der zusammengehörigen Beobachtungen von $M_{1,2}$ und M_2, so wie während der Dauer der zusammengehörigen Beobachtungen von $M_{1,3}$ und M_3 vorauszusetzende Unveränderlichkeit der Lage der Rotationsaxe des Fernrohrs zur Rotationsaxe der Erde wenigstens rechnungsmäfsig verwirklichen lassen soll. Das Schema für diese Gleichungen ist das folgende:

$$M' + dM' = \alpha' + \vartheta^0 + dm' - \left[T' + d\triangle U' + dn' \left(\frac{dT'}{dn}\right)\right]$$

$$M'' + dM'' = T'' + d\triangle U'' + dn'' \left(\frac{dT''}{dn}\right) - [\alpha'' + \vartheta^0 + dm'']$$

$$M + dM = \frac{M'' + M'}{2} + \frac{dM' + dM''}{2} = \tfrac{1}{2}\Big[T'' - T' - (\alpha'' - \alpha')$$

$$- (dm'' - dm') + d\triangle U'' - d\triangle U' + \left(\frac{dT''}{dn}\right) dn'' - \left(\frac{dT'}{dn}\right) dn' \Big]$$

Aus der Vergleichung mit dem obigen uncorrigirten Werthe von M ergiebt sich hiernach für die unbekannte Verbesserung dM, welche an einen beobachteten Werth von M zur Berücksichtigung der systematischen Fehlereinflüsse anzubringen wäre, der Ausdruck:

$$dM = \tfrac{1}{2}\left[d\triangle U'' - d\triangle U' - (dm'' - dm') + \left(\frac{dT''}{dn}\right) dn'' - \left(\frac{dT'}{dn}\right) dn' \right]$$

Die in diesem Ausdruck enthaltenen partiellen Differentialquotienten $\frac{dT'}{dn}$ und $\frac{dT''}{dn}$ berechnen sich nach folgenden mit Berücksichtigung der Gleichung 5 auf pag. 55 und der Definition $M = 90° - Q$, sowie der Gleichung $\mathrm{Cos}\, M = \frac{\mathrm{Tg}\, n}{\mathrm{Tg}\, p}$ sofort ersichtlichen Relationen:

$$\frac{dT'}{dn} = -\frac{dM}{dn} = \frac{dQ}{dn} = \frac{1}{\mathrm{Tg}\, p\, \mathrm{Cos}^2 n\, \mathrm{Sin}\, M} = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 n \sqrt{\mathrm{Tg}^2 p - \mathrm{Tg}^2 n}}$$

$$\frac{dT''}{dn} = \frac{dM}{dn} = -\frac{dQ}{dn} = -\frac{1}{\mathrm{Tg}\, p\, \mathrm{Cos}^2 n\, \mathrm{Sin}\, M} = -\frac{1}{\mathrm{Cos}^2 n \sqrt{\mathrm{Tg}^2 p - \mathrm{Tg}^2 n}}$$

Mit Eintragung dieser Gleichungen würden sich für die allgemeinen Ausdrücke der noch unbekannten Verbesserungen der bei der Berechnung des Einflusses der systematischen Fehler auf u_2 in Frage kommenden $M_{1,2}$ und M_2 folgende Formeln ergeben:

$$12)\quad \begin{cases} dM_{1,2} = \frac{1}{2}\Big[d\triangle U''_{1,2} - d\triangle U'_{1,2} - (dm''_{1,2} - dm'_{1,2}) \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{\mathrm{Cos}^2 n_{1,2}\sqrt{\mathrm{Tg}^2 p_1 - \mathrm{Tg}^2 n_{1,2}}}(dn''_{1,2} + dn'_{1,2})\Big] \\ dM_2 = \frac{1}{2}\Big[d\triangle U''_2 - d\triangle U'_2 - (dm''_2 - dm'_2) \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{\mathrm{Cos}^2 n_{1,2}\sqrt{\mathrm{Tg}^2 p_2 - \mathrm{Tg}^2 n_{1,2}}}(dn''_2 + dn'_2)\Big] \end{cases}$$

wo nach dem vorangehenden zu setzen ist:

$$p_1 = \psi \qquad p_2 = \psi - D$$
$$n_{1,2} = p_2 = \psi - D \ldots .$$

Da nun, wie man aus der Erörterung auf pag. 66 leicht berechnet:

$$13)\quad \begin{cases} du_2 = \dfrac{\mathrm{Sin}\, p_2 \,\mathrm{Cos}\, p_2}{\mathrm{Tg}\, n_{1,2}}\Big[dM_2\sqrt{\mathrm{Tg}^2 p_2 - \mathrm{Tg}^2 n_{1,2}} \\ \qquad\qquad - dM_{1,2}\sqrt{\mathrm{Tg}^2 p_1 - \mathrm{Tg}^2 n_{1,2}}\Big] \end{cases}$$

so erhält man durch Eintragung der obigen dM_2 und $dM_{1,2}$ und der vorstehenden Werthe von p_1, p_2 und $n_{1,2}$:

$$du_2 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}^2(\psi - D)\sqrt{\mathrm{Tg}^2\psi - \mathrm{Tg}^2(\psi - D)}\Big[dm''_{1,2} - dm'_{1,2} - (d\triangle U''_{1,2} - d\triangle U'_{1,2})\Big] - \tfrac{1}{2}\Big[dn''_2 + dn'_2 - (dn''_{1,2} + dn'_{1,2})\Big]$$

wofür man zum Anschluſs an gewisse vorangehende Umformungen auch schreiben kann:

$$14)\quad \begin{cases} du_2 = \frac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{Cos}\,(\psi - D)}{\mathrm{Cos}\,\psi}\sqrt{\mathrm{Sin}\,(2\psi - D)\,\mathrm{Sin}\, D}\Big[dm''_{1,2} - dm'_{1,2} \\ \qquad - (d\triangle U''_{1,2} - d\triangle U'_{1,2})\Big] - \frac{1}{2}\Big[dn'' + dn'_2 - (dn''_{1,2} + dn'_{1,2})\Big] \end{cases}$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man:

$$15)\quad \begin{cases} du_3 = \frac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{Sin}\,(\psi + D)}{\mathrm{Sin}\,\psi}\sqrt{\mathrm{Sin}\,(2\psi + D)\,\mathrm{Sin}\, D}\Big[d\triangle U''_3 - d\triangle U'_3 \\ \qquad\qquad - (dm''_3 - dm'_3)\Big] \\ \qquad - \frac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{Sin}\,2\,(\psi + D)}{\mathrm{Sin}\,2\,\psi}\Big[dn''_3 + dn'_3 - (dn''_{1,3} + dn'_{1,3})\Big] \end{cases}$$

Wenn nun einer durch die Werthe m_0 und n_0 bestimmten Lage des sogenannten Kreisendes (K) der Rotationsaxe die Werthe a^0 und i^0 der Horizontal-Coordinaten desselben (siehe pag. 82) entsprechen, und ebenso

den Werthen	m' und n'	die Werthe	a' und i'
„ „	m'' und n''	„ „	a'' und i'' also
„ „	dm' und dn'	„ „	a^0-a' und i^0-i'
„ „	dm'' und dn''	„ „	a^0-a'' und i^0-i''

u. s. f. für alle in den vorstehenden Gleichungen mit den verschiedenen unteren Indices versehenen dn und dm, so hat man, da nach den Gleichungen 14 und 15 (pag. 83):

$$\text{für } n=\psi-D \begin{cases} dn=(i^0-i)\dfrac{\operatorname{Cos}\psi}{\operatorname{Cos}(\psi-D)}-(a^0-a)\dfrac{\sqrt{\operatorname{Sin}(2\psi-D)\operatorname{Sin}D}}{\operatorname{Cos}(\psi-D)} \\ dm=-(i^0-i)\dfrac{\sqrt{\operatorname{Sin}(2\psi-D)\operatorname{Sin}D}}{\operatorname{Cos}^2(\psi-D)}-(a^0-a)\dfrac{\operatorname{Cos}\psi}{\operatorname{Cos}^2(\psi-D)} \end{cases}$$

$$\text{für } n=\psi \begin{cases} dn=(i^0-i) \\ -dm=(a^0-a)\operatorname{Sec}\psi \end{cases}$$

folgende Gleichungen für du_2 und du_3, ausgedrückt durch die Werthe der i und a, sowie der $d\triangle U$:

$$16) \begin{cases} du_2=\dfrac{\operatorname{Sin}(2\psi-D)\operatorname{Sin}D}{2\operatorname{Cos}(\psi-D)\operatorname{Cos}\psi}[i''_{1,2}-i'_{1,2}] \\ \quad+\dfrac{\operatorname{Cos}\psi}{2\operatorname{Cos}(\psi-D)}[(i''_2+i'_2)-(i''_{1,2}+i'_{1,2})] \\ \quad+\dfrac{\sqrt{\operatorname{Sin}(2\psi-D)\operatorname{Sin}D}}{\operatorname{Cos}(\psi-D)}[a''_{1,2}-\tfrac{1}{2}(a''_2+a'_2)] \\ \quad-\dfrac{\operatorname{Cos}(\psi-D)}{2\operatorname{Cos}\psi}\sqrt{\operatorname{Sin}(2\psi-D)\operatorname{Sin}D}\,[d\triangle U''_{1,2}-d\triangle U'_{1,2}] \\ du_3=\dfrac{\operatorname{Sin}2(\psi+D)}{2\operatorname{Sin}2\psi}[(i''_3+i'_3)-(i''_{1,3}+i'_{1,3})] \\ \quad-\dfrac{\operatorname{Sin}(\psi+D)}{2\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\psi}\sqrt{\operatorname{Sin}(2\psi+D)\operatorname{Sin}D}\,[a''_3-a'_3] \\ \quad+\dfrac{\operatorname{Sin}(\psi+D)}{2\operatorname{Sin}\psi}\sqrt{\operatorname{Sin}(2\psi+D)\operatorname{Sin}D}\,[d\triangle U''_3-d\triangle U'_3] \end{cases}$$

Der wahre Werth von $d\psi$ aus Gleichung 8 würde hiernach gefunden durch Eintragung von $u_2 + du_2$ und $u_3 + du_3$ statt der aus den Beobachtungen unmittelbar hervorgehenden Werthe u_2 und u_3:

$$17)\quad \left\{\begin{aligned} d\psi = {} & \frac{1}{2\,\mathrm{Sin}^2\,D}\left[u_1 + u_4 + \tfrac{1}{2}\,(u_2 + u_3)\right] \\ & + a_2\,[i''_{1,2} - i'_{1,2}] + b_2\,[(i''_2 + i'_2) - (i''_{1,2} + i'_{1,2})] \\ & \qquad + b_3\,[(i''_3 + i'_3) - (i''_{1,3} + i'_{1,3})] \\ & + c_2\,[a''_{1,2} - \tfrac{1}{2}\,(a''_2 + a'_2)] - c_3\,[a''_3 - a'_3] \\ & - d_2\,[d\triangle U''_{1,2} - d\triangle U'_{1,2}] + d_3\,[d\triangle U''_3 - d\triangle U'_3] \\ & \quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \end{aligned}\right.$$

wo zur Abkürzung folgende Bezeichnungen eingeführt sind:

$$a_2 = \tfrac{1}{8}\,\frac{\mathrm{Sin}\,(2\psi - D)}{\mathrm{Cos}\,(\psi - D)\,\mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Sin}\,D} \qquad b_2 = \tfrac{1}{8}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\psi}{\mathrm{Sin}^2\,D\,\mathrm{Cos}\,(\psi - D)}$$

$$b_3 = \tfrac{1}{8}\,\frac{\mathrm{Sin}\,2\,(\psi + D)}{\mathrm{Sin}^2\,D\,\mathrm{Sin}\,2\psi}$$

$$c_2 = \tfrac{1}{4}\,\frac{\sqrt{\mathrm{Sin}\,(2\psi - D)\,\mathrm{Sin}\,D}}{\mathrm{Sin}^2\,D\,\mathrm{Cos}\,(\psi - D)} \qquad c_3 = \tfrac{1}{4}\,\frac{\mathrm{Sin}\,(\psi + D)}{\mathrm{Sin}2\psi\,\mathrm{Sin}^2 D}\sqrt{\mathrm{Sin}\,(2\psi + D)\,\mathrm{Sin}\,D}$$

$$d_2 = \tfrac{1}{8}\,\frac{\mathrm{Cos}\,(\psi - D)}{\mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Sin}^2\,D}\sqrt{\mathrm{Sin}\,(2\psi - D)\,\mathrm{Sin}\,D}$$

$$d_3 = \tfrac{1}{8}\,\frac{\mathrm{Sin}\,(\psi + D)}{\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Sin}^2\,D}\sqrt{\mathrm{Sin}\,(2\psi + D)\,\mathrm{Sin}\,D}$$

Um eine Uebersicht über die Zahlenwerthe dieser Coefficienten zu geben, sind dieselben in der folgenden Tafel V. für den Werth $\psi = 40°$ und für die Werthe $D = 30°$ und $D = 38°{,}5$ zusammengestellt.

Tafel V.

Werthe der a_2, b_2, b_3, c_2, c_3, d_2, d_3 für $\psi = 40°$.

	a_2	b_2	b_3	c_2	c_3	d_2	d_3
$D = 30°$	0,25	0,39	0,33	0,62	0,65	0,40	0,50
$D = 38°{,}5$	0,17	0,25	0,13	0,41	0,47	0,27	0,36

Nun können bekanntlich diejenigen Correctionsglieder, welche die Neigungen i der Axe enthalten, durch Beobachtung mit aller

Sicherheit ermittelt werden. Es bleibt nur anzugeben, um welchen Betrag etwa der wahrscheinliche Fehler von $d\psi$ durch die auch bei den Ermittelungen der Neigungen nicht ganz vermeidbaren zufälligen Fehler erhöht werden kann. Man findet mit Hülfe von Gleichung 17, wenn εi den wahrscheinlichen Fehler jedes einzelnen Werthes der in diesem Ausdrucke enthaltenen i, und wenn $d \cdot \varepsilon(d\psi)$ die durch die betreffenden zufälligen Fehler bedingte Vergrößerung des wahrscheinlichen Fehlers $\varepsilon(d\psi)$ bezeichnet:

$$d \cdot \varepsilon(d\psi) = \left(\frac{\varepsilon i}{2\varepsilon(d\psi)}\right)(2\,a_2^2 + 4b_2^2 + 4\,b_3^2)\,\varepsilon i.$$

Trägt man hier Beispiels halber die Zahlenwerthe der a_2, b_2, b_3 für obiges Werthsystem $\psi = 40°\ D = 38°,5$ ein, so erhält man unter Einsetzung des zugehörigen Werthes $\varepsilon(d\psi) = 0'',34$ (siehe Tafel II.) und unter der erfahrungsmäßig begründeten Annahme von $\varepsilon i = 0'',12$ für die Vergrößerung von $\varepsilon(d\psi)$ den Betrag von $0'',01$, also ganz unerheblich.

Ungünstiger, als um diesen nach obigem durchaus gesicherten Theil der Verbesserung von $d\psi$, steht es um die folgenden Glieder, welche die Azimuthe a und die kleinen systematischen Correcturen der Zeitmessungen enthalten. Hier verlassen uns directe Bestimmungen durch die Beobachtung fast gänzlich. Bei dieser Sachlage ist es bezüglich der Azimuthe a von Wichtigkeit, daſs nach Gleichung 17 (siehe das mit c_2 multiplicirte Glied) die Veränderung des Azimuthes $a''_{1,2} - a'_{1,2}$ vollkommen eliminirt wird, und daſs man überhaupt bei der ganzen Bestimmung von u_2, welche bei $n = p_2 \ldots$, also nach den Voraussetzungen nahezu im Meridian (in der Nähe der oberen und unteren Culmination) stattfindet, den Einfluſs der Azimuthänderungen fast vollständig eliminiren kann, wenn $a''_{1,2}$ nahe zu demselben Zeitpunkt gehört, wie a''_2 und a'_2, welche letzteren beiden wegen $p_2 = n \ldots$ nahezu einem und demselben Zeitpunkt entsprechen, d. h. wenn man das Mittel der beiden Durchgangszeiten T'_2 und T''_2, welche zu dem Sterne von der Poldistanz p_2 gehören, möglichst nahe an dem letzten, und zwar an dem nicht in der Nähe des Zeniths stattfindenden,

Durchgang $T''_{1,2}$ des Sterns von der Poldistanz p_1 hält. Dieser auch für die Bestimmung von p_2 aus p_1 sehr wichtige Sachverhalt wird verständlicher, wenn man bedenkt, dafs der eine der beiden Durchgänge dieses Sterns, welcher dicht am Zenith stattfindet, von kleinen Azimuthänderungen gar nicht afficirt werden kann.

In Folge des obigen Verschwindens des Einflusses der Azimuthänderungen $a''_{1,2} - a'_{1,2}$, welche in dem Zeitraum $T''_{1,2} - T'_{1,2}$ (nahezu 12 Stunden) stattfinden, würde man den Versuch machen können, den Einfluſs der übrigen Azimuthänderungen auf $d\psi$ durch Beobachtung der letzteren an einer Mire direct bestimmbar zu machen; denn man würde eine Mire nur für die Azimuthänderung $a''_3 - a'_3$ (siehe das mit c_3 multiplicirte Glied) nöthig haben, und diese Controle brauchte nach dem ganzen Zusammenhang der Sache stets nur im Ost-West-Vertical stattzufinden. Wir wollen indessen, da man keineswegs alle von den täglichen Veränderungen der messenden Apparate abhängigen systematischen Fehlereinflüsse durch Beobachtungen an einer Mire erschöpfen, sondern doch die $d\triangle U$ als indirect zu behandelnde Verbesserungen übrig behalten würde, auf die directe Ermittelung der $a''_3 - a'_3$, die übrigens auch bei den besten Miren ihre Schwierigkeiten hat, kein Gewicht legen, vielmehr den Versuch machen, die Glieder

$$(\Sigma d\, d\psi)_{a,U} = -c_3 (a''_3 - a'_3) - d_2 (d\triangle U''_{1,2} - d\triangle U'_{1,2}) + d_3 (d\triangle U''_3 - d\triangle U'_3) \ldots$$

bei denen es sich im allgemeinen um Veränderungen während einer Zwischenzeit von 10 bis 11 Stunden handeln wird, in eine Form zu bringen, aus welcher die Möglichkeit ihrer indirecten Ermittelung und Eliminirung hervorgehen wird.

Im allgemeinen werden die Azimuthe a der Rotationsaxe, sowie die Uhrcorrectionen $\triangle U$ und ihre unbekannten letzten Verbesserungen $d\triangle U$ ziemlich einfache Functionen der Zeit sein. In Betreff der Uhrcorrectionen soll natürlich hier vorausgesetzt werden, dafs die zu den vorliegenden Messungen in letzter Stelle dienende Pendeluhr vor den gröberen Wirkungen der gewöhnlichen täglichen Wärmeperiode und vor den Wirkungen der Baro-

meterschwankungen durch bekannte Einrichtungen hinreichend gesichert ist. Ohne solche Einrichtungen würden die in Rede stehenden Bestimmungen der Polhöhe und der Poldistanzen eine bedeutend gröfsere Mühe ohne zweifellose Sicherung des Erfolges erfordern. Bezüglich der Aufhebung der barometrischen Einflüsse auf den Gang der Uhr wird übrigens bei diesen Anwendungen des Durchgangs-Instruments die Aufstellung der Uhr im luftdichten Raume den Vorzug haben vor der bloſsen Anbringung einer barometrischen Compensation, welche bekanntlich summarisch sehr gut arbeitet, aber in Folge der bekannten, hier durch die Capillaritäten der sehr engen Röhren erhöhten Trägheit der Quecksilbersäulen gegen kleine barometrische Schwankungen und in Folge der gröfseren Complication des Pendelsystems die Gefahren von Ganginderungen von kürzerer Periode nicht vollkommen genug ausschlieſst.

Am einfachsten werden die Ausdrücke der überwiegend von den Wärmebewegungen abhängenden Veränderungen der Werthe a und $d\triangle U$ in Function der Zeit sein, wenn man als ein Argument nicht die Sternzeit, sondern die Sonnenzeit, als ein anderes die Sonnenlänge wählt.

Der Uebergang von den Sternzeiten T', T'' u. s. w. auf die Sonnenzeiten geschieht für diese Zwecke mit ausreichender Genauigkeit, wenn man von den T die jedesmalige mit $\odot$ bezeichnete Sonnenlänge abzieht. Man kann also allgemein setzen:

$$\begin{aligned} a = {} & a^0 + A' \operatorname{Sin}(T-\odot) + A'' \operatorname{Sin} 2(T-\odot) \ldots \\ & + B^0 + B' \operatorname{Cos}(T-\odot) + B'' \operatorname{Cos} 2(T-\odot) \ldots \\ & \quad + C' \operatorname{Sin}\odot + C''' \operatorname{Sin} 2\odot \ldots \\ & + D^0 + D' \operatorname{Cos}\odot + D'' \operatorname{Cos} 2\odot \ldots \\ & \quad + E(T-T^0) + F(T-T^0)^2 \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\triangle U = {} & d\triangle U^0 + R' \operatorname{Sin}(T-\odot) + R'' \operatorname{Sin} 2(T-\odot) \ldots \\ & + S^0 + S' \operatorname{Cos}(T-\odot) + S'' \operatorname{Cos} 2(T-\odot) \ldots \\ & \quad + V' \operatorname{Sin}\bar{\odot} + V'' \operatorname{Sin} 2\odot \ldots \\ & + W^0 + W' \operatorname{Cos}\odot + W'' \operatorname{Cos} 2\odot \ldots \\ & \quad + X(T-T^0) + Y(T-T^0)^2 \ldots \end{aligned}$$

wo für a^0 und $d\triangle U^0$ diejenigen Werthe genommen sind, welche bei einem bestimmten T^0 stattgefunden haben, bei welchem zugleich die Bedingung erfüllt sein soll:

$$T^0 - \odot^0 = 0 \text{ und } \odot^0 = 0, \text{ während} - B^0 = B' + B'' \ldots \text{u. s. w.}$$

Was zunächst die Glieder betrifft, welche $T - T^0$ und $(T - T^0)^2 \ldots$ enthalten, so wird man diese bei guten Apparaten in dem vorliegenden Fall, wo es sich nur um Veränderungen der a und der $d\triangle U$ innerhalb eines halben Tages handelt, entweder vernachlässigen oder innerhalb solcher kurzen Zeiträume mit den Sin $\odot$, Cos $\odot$, Sin $2\odot$, Cos $2\odot$ ... enthaltenden Gliedern, also den jährlichen Aenderungen zusammenwerfen können. Trägt man die so abgekürzten Ausdrücke in die obige Gleichung für $\Sigma d\, d\psi$ ein, so erhält man, wenn man in erster Näherung auch die Glieder wegläfst, welche die doppelten Winkel enthalten:

$$\begin{aligned}
(\Sigma d\, d\psi)_{a,U} = &- c_3\ A' [\text{Sin}\,(T''_3 - \odot''_3) - \text{Sin}\,(T'_3 - \odot'_3)] \\
&- c_3\ B' [\text{Cos}\,(T''_3 - \odot''_3) - \text{Cos}\,(T'_3 - \odot'_3)] \\
&+ d_3\ R' [\text{Sin}\,(T''_3 - \odot''_3) - \text{Sin}\,(T'_3 - \odot'_3)] \\
&+ d_3\ S' [\text{Cos}\,(T''_3 - \odot''_3) - \text{Cos}\,(T'_3 - \odot'_3)] \\
&- c_3\ C' [\text{Sin}\,\odot''_3 - \text{Sin}\,\odot'_3] \\
&- c_3\ D' [\text{Cos}\,\odot''_3 - \text{Cos}\,\odot'_3] \\
&+ d_3\ V' [\text{Sin}\,\odot''_3 - \text{Sin}\,\odot'_3] \\
&+ d_3\ W' [\text{Cos}\,\odot''_3 - \text{Cos}\,\odot'_3] \\
&- d_2\ R' [\text{Sin}\,(T''_{1,2} - \odot''_{1,2}) - \text{Sin}\,(T'_{1,2} - \odot'_{1,2})] \\
&- d_2\ S' [\text{Cos}\,(T''_{1,2} - \odot''_{1,2}) - \text{Cos}\,(T'_{1,2} - \odot'_{1,2})] \\
&- d_2\ V' [\text{Sin}\,\odot''_{1,2} - \text{Sin}\,\odot'_{1,2}] \\
&- d_2\ W' [\text{Cos}\,\odot''_{1,2} - \text{Cos}\,\odot'_{1,2}]
\end{aligned}$$

Von diesen Gliedern lassen sich mehrere, wie man leicht sieht, für eine rein empirische aus den Beobachtungen der Durchgangszeiten selbst abzuleitende Bestimmung zusammenziehen.

Man erkennt aber sofort, dafs der ganze Ausdruck für $\Sigma d\, d\psi$ in der vorstehenden Näherungsform entgegengesetztes Zeichen bei gleichem Werthe erhält, wenn man in den sämmtlichen Sonnenlängen einen um 180° verschiedenen Werth einträgt, mit anderen

Worten, wenn man dieselbe Beobachtungsreihe in entgegengesetzter Jahreszeit wiederholt, und dafs man dasselbe für die $T - \odot$ enthaltenden Glieder bei der blofsen Bestimmung von $d\psi$ schon erreicht, wenn man eine zweite Combination von Poldistanzen p_1, p_2, p_3 zur Bestimmung von $d\psi$ auswählt, für welche sämmtliche T um 180° oder einen halben Tag von denen der anderen Combination verschieden sind u. s. w.

Hierbei ist zu bemerken, dafs man noch einen weiteren Schritt zur Vervollständigung des obigen Näherungsverfahrens thut, wenn man einen Theil der höheren Glieder, welche aus einer im allgemeinen wahrscheinlichen periodischen Veränderlichkeit auch der Werthe der Coefficienten A', B', R', S' im Laufe eines Jahres hervorgehen können, dadurch berücksichtigt, dafs man als die entgegengesetzten Jahreszeiten, in welchen man den gleichen und entgegengesetzten Wirkungen $dd\psi$ zu begegnen beabsichtigt, Frühjahr und Herbst wählt, da alsdann die Amplitüden der täglichen thermischen Perioden nahe dieselben sind.

Jedenfalls wird man aus den vorstehenden approximativen Darlegungen entnehmen, dafs die Mittel und Wege nicht fehlen, um auch diejenigen das vorliegende Problem compliciренden Fehlereinflüsse, welche nicht als blos zufällige betrachtet und andererseits nicht durch anderweitige directe Messungen sicher und erschöpfend genug bestimmt werden können, aus geeignet combinirten Mittelwerthen der Beobachtungsergebnisse zu eliminiren.

Bei einer sehr guten Uhr und einer sehr guten Aufstellung des Instruments und bei sorgfältiger Behandlung der noch verbleibenden kleinen periodischen Bewegungen desselben wird es übrigens gar nicht nöthig sein, dafs man immer blos unmittelbar aufeinander folgende correspondirende Durchgangszeiten T' und T'' mit einander verbindet, sondern man wird dabei ähnlich verfahren können, wie es bereits mit hinreichendem Erfolge bei der Ableitung der absoluten Rectascensionen von Circumpolarsternen aus den sämmtlichen während eines bestimmten Zeitraums beobachteten oberen und unteren Culminationen geschieht. Schliefslich weise

ich noch darauf hin, dafs die Poldistanzen, welche nach obigen Darlegungen völlig unabhängig und fundamental bestimmbar sind, bis nahe an das Gebiet solcher Poldistanzen der Sonne reichen, aus denen noch mit hinreichend günstigen Coefficienten auch die absoluten Rectascensionen der Sonne abgeleitet werden können, und dafs somit das Durchgangs-Instrument auch zu der unabhängigen Controle und Verstärkung dieser grundlegenden Bestimmungen wird beitragen können.

Ich behalte mir vor, auf diese und eine Anzahl von anderen Detailfragen der praktischen Ausführung, welche sich an die im obigen und in der vorangehenden Abhandlung vorgeschlagenen Methoden knüpfen, in einer dritten Abhandlung zurückzukommen, sobald die erforderlichen Beobachtungsreihen mit einem nach den Principien der obigen Methoden eingerichteten Universal-Durchgangs-Instrument, welches von dem hiesigen Mechaniker C. Bamberg hergestellt und auf der hiesigen Sternwarte aufgestellt worden ist, vorliegen werden.

Untersuchungen über Pendeluhren.

I.

Aus den Beobachtungen der Meridian-Durchgänge der Hauptsterne, welche in den Jahren 1860 bis 1864 an der Berliner Sternwarte von mir angestellt worden waren, hatte sich ziemlich reiches Material für die Untersuchung des Ganges der dabei benutzten Pendeluhr Tiede Nr. 3 ergeben.

Diese Pendeluhr, mit Quecksilber-Compensation versehen, war seit über 30 Jahren von den Berliner Astronomen benutzt worden und hatte durch successive Verbesserungen der Compensation eine bemerkenswerthe Unabhängigkeit von andauernden Temperaturänderungen erlangt.

Nur secundäre Einflüsse der Temperatur, z. B. bei andauernder Kälte die mit der Erstarrung des Oeles eintretende Verminderung des Schwingungsbogens, wirkten noch mitunter störend ein.

Als diese gut compensirte Uhr im Jahre 1860 bei Uebernahme der Meridian-Beobachtungen in meine Hände gekommen war, lag es nahe, dafs ich nunmehr ihre Untersuchung weiter führte und mein Augenmerk auch auf die Ermittelung der Abhängigkeit ihres Ganges vom Barometer-Stande richtete. Es gelang auch bald nachzuweisen, dafs die noch übrig gebliebenen Schwankungen des Ganges der Uhr in einer engen Beziehung zu den Schwankungeu des Barometers standen.

Damals war von astronomischen Untersuchungen über solche Einflüsse auf Pendeluhren bereits bekannt eine Mittheilung von Robinson (Memoirs of the Royal Astr. Soc. Vol. V. p. 129) sowie

W. Struve's Angabe in der Description de l'Observatoire de Poulkova p. 220.

Robinson fand 1831, dafs sein Quecksilber-Pendel für eine Barometer-Aenderung von ± 1 Zoll englisch eine Veränderung des täglichen Ganges von ± $0^s,24$ erfuhr, Struve erhielt für denselben Ausdruck die Zahl ± $0^s,32$. (Später wurde für dieselbe Kessels'sche Pendeluhr $0^s,31$ gefunden, siehe Expédition Chronométrique de 1843, pag. 67).

Bekanntlich war schon früher bei den Bestimmungen der Secunden-Pendel-Längen seit Bouguer eine Reduktion für die jedesmalige Dichtigkeit der Luft angewandt worden, welche jedoch wie Bessel 1828 in den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1826 (Ueber die Priorität von Du Buat siehe Bessel Astr. Nachr. Nr. 204) nachwies, fehlerhaft geblieben war, weil sie nur die Veränderungen des relativen Gewichtes des Pendels selbst in der Luft berücksichtigte, während das ganze schwingende System noch eine beträchtliche mitbewegte Luftmasse enthält, durch deren Berücksichtigung sich eine ansehnliche Vermehrung des Einflusses von Veränderungen der Dichtigkeit des Mediums ergiebt.

Ist m die Masse des Pendels, m' die Masse der von seinem Volumen verdrängten Luft, s der Abstand des Schwerpunktes des Pendels von der Drehaxe, $m\mu$ das Trägheits-Moment des Pendels für eine durch den Schwerpunkt parallel der Drehaxe gelegte Axe also $m\ (\mu + ss)$ das Trägheits-Moment des Pendels in Bezug auf die Dreh-Axe selbst, so hatte man früher angenommen, das in der Luft bewegte Pendel habe dieselbe Schwingungsdauer, wie ein einfaches Pendel im leeren Raum, dessen Länge l gegeben werde durch die Gleichung

$$l = \frac{m\ (\mu + ss)}{s\ (m - m')} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Daraus würde folgen, dafs, wenn m' sich auf den Barometer-Stand b bezieht, also für eine Aenderung des Barometerstandes $= \triangle b$ die Aenderung $\triangle m' = m' \cdot \frac{\triangle b}{b}$ gesetzt wird, die zu $\triangle b$ ge-

hörige Veränderung des täglichen Ganges der Pendeluhr in Secunden mit genügender Näherung ausgedrückt würde durch:

$$\triangle u = 43200 \frac{\triangle b}{b} \frac{m'}{m} \ldots .$$

Setzt man $\frac{m'}{m}$ (für $b = 29{,}5$ engl. Zoll) gleich $\frac{1}{8200}$, was für ein Quecksilber-Pendel mit specifischem Gewichte 10,6 nicht stark von dem durchschnittlichen Sachverhalt abweichen wird, so hätte man für ein $\triangle b$ von einem engl. Zoll den Einfluſs auf den täglichen Uhrgang $\triangle u = 0^s{,}18$. Die Vergleichung dieses Werthes mit dem entsprechenden, oben für zwei Quecksilber-Pendel mitgetheilten, zeigt schon das Unzureichende der früheren Formel. Bessel hat aber ihre Unvollständigkeit theoretisch und experimentell eingehendst erwiesen.

Er fügt zu dem Trägheits-Moment des Pendels $m(\mu + ss)$ den Einfluſs der mitbewegten Luftmasse unter der Form $m'K$ hinzu, wo K ein experimentell zu bestimmender, von der Form jedes Pendels abhängiger Coefficient ist, und führt zugleich den Abstand s' des Schwerpunktes der Figur des Pendels von der Dreh-Axe ein, sodaſs nach ihm für die Länge des einfachen Pendels, dessen Schwingungsdauer der eines beliebig zusammengesetzten, in der Luft schwingenden Pendels entspricht, der genauere Ausdruck gilt:

$$l = \frac{m(\mu + ss) + m'K}{ms - m's'}.$$

Setzt man noch mit Bessel $k = \frac{K}{\mu + ss}$ und vernachlässigt man näherungsweise den Unterschied $s' - s$ multiplicirt mit dem sehr kleinen Werthe $\frac{m'}{m}$, sowie die zweiten und höheren Potenzen dieses letzteren Werthes, so erhält man zur Vergleichung mit den jetzigen Beobachtungen genügend:

$$l = \frac{m(\mu + ss)}{ms} \left\{1 + \frac{m'}{m}\left(1 + k\right) \ldots .\right\}$$

Mit der Annahme der früheren Bezeichnungen für die Barometer-Stände und ihre Aenderungen haben wir also hiernach die Variation des täglichen Ganges einer Pendeluhr abhängig von der Veränderung der Dichtigkeit der Luft:

$$\triangle u = 43200 \frac{\triangle b}{b} \frac{m'}{m}\left(1 + k\right) \ldots\ldots$$

Die Bestimmung des Werthes $\triangle u$ durch Beobachtung des Uhrganges in Verbindung mit der abgelesenen Barometer-Bewegung $\triangle b$ wird also, wenn $\frac{m'}{m}$ genügend bekannt ist, einen Werth von k ergeben, der dem angewandten Pendel nach seiner Form und Massenvertheilung eigenthümlich ist.

Die Gleichung für $\triangle u$ läfst sich übrigens zur Vermeidung des Mifsverständnisses, als ob das jedesmalige Verhältnifs $\frac{\triangle b}{b}$ das Bestimmende sei und mit Rücksicht darauf, dafs für denselben Beobachtungsort und dasselbe Pendel $\frac{m'}{b} \times \frac{1}{m}$ eine Constante C ist, besser folgendermaafsen stellen:

$$\triangle u = 43200.\ \triangle b\ .\ C\,(1 + k) \ldots\ldots$$

wobei natürlich in $\triangle b$ und in C dieselbe barometrische Maafseinheit anzuwenden ist.

Bessel selbst hat einen Werth von k für solche Pendel, die aus einer Kugel, an einem Faden schwingend, bestanden, durch Vergleichung der Schwingungs-Dauer von Messingkugeln und Elfenbeinkugeln (also für stark verschiedene Werthe von $\frac{m'}{m}$) bestimmt und dafür gefunden: $k = 0{,}95$.

Ueber die Vervollständigung dieser Versuche siehe noch Astr. Nachr. 223. — Bessel hat (a. a. O.) später noch gefunden, dafs auch die verschiedene Länge der von ihm angewandten Faden-Pendel bei sonst gleichen Umständen schon einen merklichen Einfluſs auf den Werth von k äufserte.

Höchst interessante und wichtige Versuche über die Bewegung

des Pendels in Mitteln von verschiedener Dichtigkeit haben Sabine und Baily angestellt (Philos. Transactions 1829 und 1832).

Beide haben Pendel von verschiedener Form innerhalb dicht verschlossener Räume in beliebig verdünnter Luft schwingen lassen und den Einfluſs beliebiger Dichtigkeits-Aenderungen scharf beobachtet. Sabine hat u. A. Vergleichungen zwischen dem Einflusse von Wasserstoff und atmosphärischer Luft gemacht, ganz besonders aber hat Baily durch zahlreiche Variationen der Experimente reiches Material angehäuft, dessen theoretische Bearbeitung Stokes im 9. Bande der Transactions of the Cambridge Philos. Soc. gegeben hat.

Baily findet durch directe Experimente für ein gewöhnliches Quecksilber-Pendel (specifisches Gewicht 1,06) den Werth k 1,34, woraus sich die Aenderung des täglichen Ganges für einen englischen Zoll Barometer-Schwankung zu $0^s,42$ ergeben würde.

Bessel nimmt dagegen $k = 1{,}0$ an und findet damit (Astron. Nachr. 465), unter Voraussetzung eines specifischen Gewichtes des Pendels $= 10$, die Variation des täglichen Ganges für eine Variation des Barometers von 10 Pariser Linien gleich $0^s,3328$ (für einen englischen Zoll $0^s,37$).

Dieser Werth ist mit dem oben von Struve mitgetheilten und mit dem schliefslich von Wagner (G. Wagner, Ueber den Gang der Pulkowaer Normaluhr, Bulletin de l'Académie de St. Petersburg, Tome III, Juni 1864) zu $0^s,33$ pro englischen Zoll angenommenen Werthe in ziemlich naher Uebereinstimmung und wird auch durch die nachfolgend mitgetheilten Beobachtungen bestätigt, soweit man bei den approximativen und nur für ein bestimmtes Pendel giltigen numerischen Annahmen, die Bessel für k und m zu Grunde legt, von Bestätigung der theoretischen Annahme reden kann. Auch die Resultate von Robinsons späteren Untersuchungen nähern sich dem Werthe Bessels.

Endlich hat Professor Kaiser in Leyden in den Astr. Nachr. 1502 eine sehr erschöpfende Untersuchung über die empirische Ermittelung des Einflusses der Luftdichtigkeits-Schwankungen auf

den Gang mehrerer Pendeluhren gegeben, deren Resultate weiter unten in der Zusammenstellung mit aufgeführt werden sollen.

In der von Bessel für die Pendel-Schwingung in einer Flüssigkeit aufgestellten Differential-Gleichung befindet sich neben den Ausdrücken, nach welchen bei unverändertem Schwingungsbogen die Schwingungsdauer von dem Medium beeinflufst wird, noch ein Glied, welches den Einfluſs des Mediums auf den Schwingungsbogen des Pendels enthält. Eine kritische Untersuchung dieser Einflüsse auf die Abnahme der Schwingungsbögen nach Bessels Beobachtungen hat Peters A. N. 269 ff. gegeben.

Bei den Bestimmungen der Pendel-Längen, bei welchen man stets den Schwingungsbogen möglichst genau beobachtet und damit die Schwingungsdauer auf unendlich kleine Amplituden reducirt, würde eine Veränderung des Schwingungsbogens nur dann verfälschend einwirken können, wenn zugleich die Reductionsformel auf unendlich kleine Schwingungen illusorisch würde.

Bessel weist nach, dafs ein merklicher Einfluſs dieser Art bei mäfsigen Schwingungsbögen und geringer Dichtigkeit des Mediums nicht eintrete.

Etwas anders aber verhält sich die Sache bei einer Pendel-Uhr, bei welcher im Allgemeinen der Schwingungsbogen nicht beobachtet und in Rechnung gebracht, sondern bei welcher die durch Reibungen und durch Widerstände der Luft, der Aufhängung u. s. w. stets bedingte Abnahme der Schwingungsbögen mechanisch durch eine Triebkraft ausgeglichen werden soll, um die Bewegung dauernd zu erhalten.

Der Schwingungsbogen wird hier konstant, wenn die Impulse des Triebwerkes den Widerständen das Gleichgewicht halten, und durch die Addition der Wirkungen kann also selbst bei sehr kleinen Aenderungen der Widerstände oder der Impulse eine erhebliche Veränderung des Schwingungsbogens bis zur Erreichung eines neuen Gleichgewichts-Zustandes herbeigeführt werden, wodurch dann auch der Gang bemerklich afficirt wird.

Wichtige experimentelle Untersuchungen über die Schwingungen

und über die Abnahme der Schwingungs-Amplituden im widerstehenden Medium hat E. Meyer im 125. Bande von Poggendorfs Annalen gegeben, woselbst man auch eine sehr vollständige Zusammenstellung der einschlagenden Literatur findet.

Ich werde weiter unten im dritten Abschnitt einige von mir in verdünnter Luft angestellte Versuche über die Veränderlichkeit des Schwingungsbogens einer Pendeluhr bei Veränderlichkeit der Dichtigkeit des Mediums mittheilen und schicke einstweilen nur voraus, dafs bei den gewöhnlichen Barometer-Schwankungen kein Einflufs auf den Schwingungsbogen der Pendeluhr hervortritt, welcher einige Zehntel der Bogenminute überstiege. —

Unregelmäfsige und schnell vorübergehende Schwankungen von diesem Betrage sind aber auf den Betrag des täglichen Ganges der Pendel-Uhr Tiede Nr. 3 von keinem irgend erheblichen Einflufs gewesen.

II.

Zum Zweck der empirischen Untersuchung der Einflüsse der Luftdichtigkeits-Schwankungen auf unsere Pendeluhr habe ich 650 zwischen dem 1. April 1860 und dem Anfang des Jahres 1864 von mir angestellte Zeitbestimmungen diskutirt, deren jede durchschnittlich die Meridian-Durchgänge von 3 Sternen mit jedesmaliger Nivellirung enthielt und durch zahlreiche andere Bestimmungen über die Lage des Instrumentes zum Meridian gesichert war.

Mit Hilfe der regelmäfsigen von 8 zu 8 Stunden (6 Uhr, 2 Uhr, 10 Uhr) angestellten Barometer-Beobachtungen, welche ich den Papieren der hiesigen meteorologischen Station entlehnen durfte, konnte ich für jedes beliebige Zeitintervall einen genügenden Werth der zugehörigen mittleren Dichtigkeit der Luft ableiten und war so im Stande, die zahlreichen Zeitbestimmungen in Gruppen zu sondern, die zur Untersuchung der fraglichen Aenderungen des Uhrganges günstig waren.

Im Ganzen bildete ich hieraus 180 Gruppen von täglichen Uhrgängen, welche durchschnittlich aus Zwischenzeiten von etwa 8 Tagen abgeleitet waren, im Einzelnen jedoch entsprechend der

längeren oder kürzeren Dauer von sehr hohen oder sehr niedrigen Barometer-Ständen aus etwas längeren oder kürzeren Zeit-Intervallen bestimmt wurden.

Da jedoch kein Intervall unter 3 Tagen angenommen wurde, so wird der Einfluſs der unmittelbaren Beobachtungs-Fehler nirgends merklich genug gewesen sein, um für die innerhalb der verschiedenen Abschnitte abgeleiteten Uhrgänge die Annahme verschiedener Gewichte erforderlich zu machen.

Leider war es nicht zu vermeiden, daſs in den erwähnten 4 Jahren kleine Veränderungen an der Uhr vorkamen, welche die strenge Vergleichbarkeit sämmtlicher Gänge beeinträchtigen.

So erhielt die Uhr am 10. November 1861 frisches Oel, weil eine starke Abnahme des Schwingungsbogens ziemlich plötzlich eingetreten war; ferner wurde zwischen Juli 24 und August 8 1863 im Meridian-Zimmer eine bauliche Veränderung ausgeführt, welche durch starke Erschütterungen und Staub trotz aller Vorsorge die Uhr etwas afficirt haben wird.

Aufserdem war es in Folge der bereits Eingangs erwähnten Wirkung der Kälte auf den Schwingungsbogen rathsam, die Uhrgänge während gröſserer Kälte-Perioden von unserer Diskussion auszuschlieſsen, wenn der Schwingungsbogen nicht sorgfältig beobachtet war.

Zunächst faſste ich nach einem ungefähren Ueberblicke die 124 Abschnitte der Uhrbewegung zusammen, welche den Zeitraum von 1860 April bis 1862 November erfüllen, und lieſs daraus nur wegen des im November 1861 geschehenen Eingriffes die Monate November und December 1861, sowie alle Uhrgänge bei mehr als 2° Kälte weg, (was im Ganzen 16 Gruppen trifft). Aus diesem Material lieſsen sich dann folgende Haupt-Gruppen aus denjenigen Einzel-Gruppen bilden, welchen nahe derselbe Barometerstand zugehörte.

Barometer Stand.	Täglicher Gang.	Zahl d. Einzel-Gruppen.	Wahrscheinl. Fehler.	R—B.
$331^{L}{,}0$	$+ 0^{s}{,}040$	5	$0^{s}{,}018$	$+ 0^{s}{,}000$
332,7	+ 0,080	6	0,016	+ 0,014
333,5	+ 0,143	16	0,010	— 0,024
334,4	+ 0,150	24	0,008	+ 0,001
335,5	+ 0,167	16	0,010	+ 0,015
336,5	+ 0,210	19	0,009	+ 0,004
337,5	+ 0,210	9	0,013	+ 0,035
338,6	+ 0,304	8	0,014	— 0,025
339,7	+ 0,336	5	0,018	— 0,022
342,1	+ 0,420	1	0,040	— 0,030

In dieser Zusammenstellung tritt die Abhängigkeit des Ganges vom Barometerstande sogleich mit grofser Deutlichkeit hervor.

Die neben den Werthen der täglichen Gänge angesetzten wahrscheinlichen Unsicherheiten sind folgendermaafsen abgeleitet.

Innerhalb jeder der obigen Haupt-Gruppen wurden die sämmtlichen beobachteten Gänge auf das Mittel der zugehörigen Barometer-Stände reducirt, wobei als vorläufige Rate die Gang-Aenderung von $0^{s}{,}033$ pro Pariser Linie nach Bessel angenommen wurde. Da die Schwankungen der Barometer-Stände innerhalb jeder Haupt-Gruppe eine Linie nicht überschreiten, wird dadurch keine irgend merkliche Unsicherheit entstanden sein.

Aus den Abweichungen der einzelnen so reducirten Gänge von den Mittelwerthen jeder Haupt-Gruppe wurde die wahrscheinliche Unsicherheit eines einzelnen Gruppen-Werthes des täglichen Ganges zu $0^{s}{,}040$ bestimmt, und mit Hülfe dieses Werthes und der Anzahl der Einzel-Gruppen in jeder Haupt-Gruppe die oben angegebene wahrscheinliche Unsicherheit abgeleitet. Die letzte Kolumne der obigen Zusammenstellung enthält unter der Bezeichnung R—B die nach der folgenden Ausgleichung der beobachteten Werthe durch die Theorie übrig bleibenden Fehler. Nennt man nun den täglichen Gang der Pendeluhr für den mittleren Barometer-Stand $336^{p.L.}{,}0 \ldots u^{0}$ und setzt man hier $u_0 = + 0^{s}{,}200 + x$; nennt man ferner die Verzögerung der Uhr-Bewegung oder die

Vermehrung des täglichen Ganges für eine Vermehrung des Barometer-Standes von 10 Par. Lin. β, und setzt man mit Rücksicht auf Bessel's Annahmen $\beta = 0^s,333 + y$, so liefert die obige Zusammenstellung folgende Bedingungs-Gleichungen, zur Bestimmung von x und y:

$$+ 0{,}007 = x - 0{,}50\, y$$
$$- 0{,}010 = x - 0{,}33\, y$$
$$+ 0{,}026 = x - 0{,}25\, y$$
$$0{,}000 = x - 0{,}15\, y$$
$$- 0{,}016 = x - 0{,}05\, y$$
$$- 0{,}007 = x + 0{,}05\, y$$
$$- 0{,}040 = x + 0{,}15\, y$$
$$+ 0{,}017 = x + 0{,}26\, y$$
$$+ 0{,}013 = x + 0{,}37\, y$$
$$+ 0{,}017 = x + 0{,}61\, y.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Hinzuziehung der jeder Gleichung nach der Zahl der darin enthaltenen Gruppen zukommenden Gewichte die Werthe von x und y und damit:

$$w^0 = + 0^s,1977 \pm 0^s,0043$$
$$\beta = \quad 0{,}3153 \pm 0{,}0193$$

Für den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung von der Einheit des Gewichtes ergiebt die Elimination

$$0^s,043$$

während die Untersuchung der Abweichungen innerhalb der Gruppen dafür $0^s,040$ gefunden hatte.

Diese Uebereinstimmung berechtigt zu dem Ausspruch, dafs während des Intervalles 1860 April bis 1862 November (mit Ausschlufs der Zeiten besonders angegebener Störungen) der Gang unserer Pendel-Uhr nur eine Funktion des Barometer-Standes gewesen ist, und dafs die dafür gewählte Form das Beobachtungs-Material erschöpfend darstellt.

Eine zweite Werthbestimmung für β lieferte eine kürzere,

aber durch noch stärkere Barometer-Schwankungen ausgezeichnete Reihe, welche in den Zeitraum von December 1862 bis April 1863 fällt und 20 Gruppen enthält, von denen bei dem milden Winter keine ausgeschlossen zu werden brauchte.

Der mittlere Gang dieser winterlichen Gruppe für den Barometer-Stand 336,0 ist jedoch von dem im vorangehenden $2\frac{3}{4}$ jährigen Abschnitte gefundenen merklich verschieden, während in dem letzten Haupt-Abschnitt von Mai 1863 bis Ende 1863 der frühere Gang wieder eintritt.

Wir finden zunächst von December 1862 bis April 1863:

Barometer-Stand.	Täglicher Gang.	Zahl der Gruppen.	R—B.
328,L9	$-0^s,230 \pm 0^s,027$	1	$+0^s,016$
331,7	$-0,150 \pm 0,027$	1	$+0,035$
332,4	$-0,083 \pm 0,013$	4	$-0,008$
335,3	$+0,012 \pm 0,013$	4	$-0,001$
336,6	$+0,078 \pm 0,013$	4	$-0,021$
338,7	$+0,118 \pm 0,012$	5	$+0,013$
342,3	$+0,250 \pm 0,027$	1	$+0,007$

Setzt man hier den täglichen Gang für den Barometer-Stand 336,0 . . . $u_0 = +0^s,030 + x$ und den Barometer-Coefficienten $\beta = 0^s,333 + y$, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$-0^s,023 = x - 0,71\,y$$
$$-0,037 = x - 0,43\,y$$
$$+0,007 = x - 0,36\,y$$
$$+0,005 = x - 0,07\,y$$
$$+0,028 = x + 0,06\,y$$
$$-0,002 = x + 0,27\,y$$
$$+0,010 = x + 0,63\,y$$

Hieraus ergiebt sich mit Anwendung der Gewichtzahlen wie oben

$$u_0 = +0^s,0357 \pm 0^s,0045$$
$$\beta = \quad 0,3508 \pm 0,0141.$$

Für den w. F. eines Beobachtungs-Werthes von der Einheit eines Gewichtes ergiebt sich aus der Elimination $0^s,020$, während die Abweichungen innerhalb der Gruppen dafür lieferten $0^s,027$.

Endlich giebt der letzte Haupt-Abschnitt vom Mai bis Ende 1863 folgende Resultate:

Barometer-Stand.	Täglicher Gang.	Zahl der Gruppen.	R—B.
$331^L,3$	$+ 0^s,040 \pm 0^s,020$	1	$+ 0^s,017$
334,6	$+ 0,187 \pm 0,012$	3	$- 0,029$
335,4	$+ 0,180 \pm 0,010$	4	$+ 0,003$
336,7	$+ 0,195 \pm 0,010$	4	$+ 0,027$
337,5	$+ 0,255 \pm 0,014$	2	$- 0,009$
338,5	$+ 0,295 \pm 0,014$	2	$- 0,018$

Setzt man hier wieder den täglichen Gang der Uhr für den Barometer-Stand 336,0 . . . $u_0 = + 0^s,200 + x$ und den Barometer-Coefficienten $\beta = + 0^s,333 + y$ so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} - 0^s,003 &= x - 0,47\, y \\ + 0,034 &= x - 0,14\, y \\ 0,000 &= x - 0,06\, y \\ + 0,028 &= x + 0,07\, y \\ + 0,005 &= x + 0,15\, y \\ + 0,012 &= x + 0,25\, y \end{aligned}$$

Aus diesen findet man mit den obigen Gewichten x und y und damit:

$$\begin{aligned} u_0 &= + 0^s,2011 \pm 0^s,0069 \\ \beta &= \quad 0,3056 \pm 0,0395 \end{aligned}$$

Der w. F. eines Beobachtungs-Werthes mit dem Gewichte 1 ergiebt sich hier aus der Elimination $0^s,027$, während die Abweichungen innerhalb der Gruppen dafür hatten finden lassen $0^s,020$.

Man kann also auch von den beiden letzten Beobachtungs-Abschnitten sagen, dafs der Uhrgang in ihnen von dem angenommenen Barometer-Einflufs nahezu erschöpfend bestimmt wird.

Bemerkenswerth bleibt allerdings noch der Unterschied der

wahrscheinlichen Unsicherheiten der einzelnen Gruppen mit dem Gewichte 1 in den drei Haupt-Abschnitten.

Während des ersten Abschnittes von 2 Jahren 8 Monaten ist der wahrscheinliche Betrag der von dem Barometer-Einfluſs nicht dargestellten, übrig bleibenden Schwankungen des Uhrganges im Durchschnitt aus den Resultaten der Untersuchung der Gruppen-Bildung und der Elimination $0^s,042$, für den zweiten Abschnitt von 5 Monaten ebenso gebildet $0^s,024$, für den dritten Abschnitt von 6 Monaten ebenso $0^s,024$.

Es zeigen sich also bei der Vereinigung von Uhrgängen aus längeren Zeit-Intervallen die unerklärten Schwankungen noch ansehnlich gröſser als in kürzeren, eine an sich ganz natürliche Erscheinung, die von den nicht compensirten und in längeren Intervallen stärker accumulirten secundären Wirkungen der Temperatur, der Feuchtigkeit u. s. w. auf den Betrag der mechanischen Widerstände abhängen wird. Auch kleine noch übrig gebliebene Fehler der Compensation selbst, insbesondere die theoretische Unvollkommenheit gerade der Quecksilber-Compensation gegenüber von sehr starken und schnellen Temperatur-Aenderungen und mangelhafter Ausgleichung derselben im Beobachtungs-Raume können noch darauf eingewirkt haben (Siehe Bessel A. N. 465).

Während des 1. Abschnittes betrug nämlich die Amplitude der Temperatur-Schwankungen 18° R., während des 2. nur 6°, während des dritten 8°.

In dem übrig bleibenden wahrscheinlichen Fehler $0^s,024$ für einen beobachteten Uhrgang der beiden letzten Abschnitte wird übrigens ein Theil noch durch die eigentlichen Beobachtungs-Fehler in den Zeitbestimmungen bei einem zu Grunde liegenden mittleren Intervall von 8 Tagen erklärt werden können.

Der Gang unserer Uhr ist seit dem Jahre 1864 nicht so gut geblieben, wie er sich nach den obigen Resultaten darstellt, und zwar in Folge der seit jener Zeit erfolgten Einführung einer elektrischen Unterbrechungs-Vorrichtung, welche, obgleich sie nach dem sinnreichen Prinzip von Krille konstruirt ist und durch Ver-

bindung mit einem elektrischen Condensator sehr lange intact und correctionsfrei erhalten wird, dennoch in längeren Intervallen, insbesondere bei stärkeren Temperatur- und Feuchtigkeits-Aenderungen, Verstaubungen des Quecksilbers u. s. w., den Gang der Uhr für längere Zeiträume weniger übereinstimmend zu machen scheint, als derselbe früher ohne jegliche Störung durch eine Unterbrechungs-Vorrichtung war.

In einer späteren Mittheilung wird nachzuweisen sein, dafs auch diese secundären Einwirkungen der Unterbrechungs-Einrichtungen bedeutend vermindert werden können durch die Aufstellung einer mit elektrischer Unterbrechung arbeitenden Uhr in einem luftdicht verschlossenen Raume; wenigstens hat eine andere Pendeluhr der Berliner Sternwarte, welche gegenwärtig die Haupt- und Normaluhr derselben bildet, und welche in einem luftdichten Glas-Cylinder arbeitet, trotzdem sie ebenfalls mit einer elektrischen Unterbrechungs-Vorrichtung versehen ist, keine aus der letzteren hervorgehenden Uebelstände mehr erkennen lassen, wobei natürlich auch ein elektrischer Condensator, der die Oxyd-Bildung wesentlich einschränkt, erhebliche Hilfe geleistet hat.

Verbindet man die drei obigen Werthe des für unser Pendel gefundenen Barometer-Coefficienten, nämlich:

$$0^s,3153 \pm 0^s,0193$$
$$0,3508 \pm 0,0141$$
$$0,3056 \pm 0,0395$$

nach ihren wahrscheinlichen Fehlern, so erhält man schliefslich:

$$\beta = 0^s,336$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler $0^s,011$.

Wir werden später noch auf einem andern Wege diesen Zahlenwerth controliren. Hier möge noch eine kurze Uebersicht von ähnlichen bei anderen Pendeluhren ebenfalls rein empirisch gefundenen Werthen Platz finden.

Für eine Barometer-Aenderung von 10 Millimetern ändert sich der tägliche Gang bei einem Quecksilber-Pendel

nach Robinson { (Mem. Astr. Soc. V) . . . . . um $0^s,095$
(Armagh Observations) . . . . . „ 0,147

bei dem Quecksilber-Pendel Kessels 1364 in Pulkowa
nach Struve und Wagner . . . . . „ 0,131

bei der Pendeluhr Hohwü Nr. 17 . . . . . „ 0,127

in Leiden nach Kaiser (Astr. Nachr. 1502) bei der
Pendeluhr Hohwü Nr. 18 . . . . . „ 0,153

in Leiden nach Kaiser (Astr. Nachr. 1502) bei einer
Pendeluhr von Schmidt in Amsterdam . . . . „ 0,134

bei der Pendeluhr Tiede Nr. 3 in Berlin . . . . . „ 0,149

Diese Pendeluhren haben sämmtlich analog construirte Quecksilber-Pendel.

Endlich fand Baily aus Beobachtung eines Quecksilber-Pendels in freier Luft und in künstlich verdünnter Luft für den obigen Werth . . . . . $0^s,165$

Bessel berechnete nach Durchschnittswerthen des specifischen Gewichts der Pendel und des Faktors k . . 0,147

Angesichts der oben bewiesenen starken Abhängigkeit der Pendeluhr Tiede Nr. 3 von den Schwankungen der Luft-Dichtigkeit, welche nur dadurch für die astronomischen Beobachtungen etwas unschädlicher werden, dafs bei sehr starken Barometer-Schwankungen in der Regel der Himmel getrübt wird, entstand natürlich der Wunsch, eine ansehnliche Verbesserung in der Ausführung von Winkel-Messungen durch Zeit-Messungen vermöge der Aufhebung jenes Einflusses herbeizuführen.

Zwar kann man diese Verbesserung auch durch Rechnung bewirken, wenn man fortlaufende Barometer-Aufzeichnungen hinzuzieht; indessen ist es wohl berechtigt, nach automatischen Verbesserungseinrichtungen zu suchen, bevor man auf die Dauer jenen mühsameren Weg einschlägt.

III.

Eine Barometer-Compensation durch Anbringung von Barometer-Röhren am Pendel selbst ist schon von Robinson (Mem. of the Royal Astr. Soc. V.) und Bessel (Astr. Nachr. Nr. 465) vor-

geschlagen und von Robinson, sowie neuerdings auch in einer besondern sehr zweckmäfsigen Form (siehe Astr. Nachr. Nr. 1482) von Professor Krüger, von Letzterem mit sehr befriedigendem Erfolge ausgeführt worden.

Auch Herr Knoblich in Hamburg hat mit Erfolg Barometer-Compensationen nach Bessel an seinen Pendeluhren angebracht.

Ferner hat man bekanntlich eine Barometer-Compensation an der neuen Normaluhr der Sternwarte zu Greenwich mit Hilfe von Magneten, deren Wirkung durch den Barometer-Stand selbst in geeigneter Weise regulirt wird, ausgeführt.

Gerade bei dem öffentlichen Zeitdienst wird gegenwärtig für längere Intervalle eine rechnungsmäfsige Bestimmung des Uhrganges und als Grundlage derselben eine viel gröfsere Beständigkeit des Ganges verlangt, als bei den astronomischen Zeitangaben, bei welchen letzteren stets dann, wenn man die Kenntnifs des Uhr-Standes und -Ganges zu Beobachtungszwecken braucht, der Himmel hell ist und benachbarte Zeitbestimmungen darbietet, so dafs man alsdann auf die Beständigkeit des Uhrganges höchstens für Bruchtheile des Tages zu rechnen nöthig hat. Wenn dagegen in unserem Winter mitunter 2 bis 3 Wochen lang keine Zeitbestimmungen ermöglicht werden, so treten bei Uhren, deren Gang nicht eine ansehnlich gröfsere Beständigkeit hat, als die meisten der astronomischen Pendeluhren unmittelbar zeigen, oder nicht durch fortlaufende Thermometer- und Barometer-Aufzeichnungen, und durch unablässige darauf basirte Corrections-Rechnungen gehörig verbessert wird, in den öffentlichen Zeit-Angaben leicht Discontinuitäten von ganzen Secunden ein, deren künstliche Ausgleichung die Sache noch verschlimmern würde.

Es ist allerdings wahr, dafs durch die Einführung von barometrischen Compensations-Einrichtungen das ganze Pendel-System in gewisser Beziehung verschlechtert wird, indem dadurch nicht nur die thermometrische Compensation eine Complication erfährt, sondern überhaupt die Beweglichkeit und Wandelbarkeit innerhalb des schwingenden Systems vergrössert wird.

Zwar läfst sich diejenige Verbesserung der thermometrischen Compensation, welche ein mit Barometer-Compensation nachträglich versehenes Pendel erfordert, leicht ausführen.

Dennoch bleibt die gröfsere Complication des schwingenden Systems in Betreff der Wärme-Wirkungen auf das Pendel besonders dann sehr ungünstig, wenn in dem Beobachtungs-Raume starke Wärme-Verschiedenheiten obwalten können, die innerhalb der Grenzen der Pendel-Länge sehr bemerkliche und alsdann auch veränderliche Temperatur-Unterschiede bedingen.

Wenn man indessen ein in der oben erwähnten Weise für Luftdichtigkeits-Schwankungen compensirtes Pendel in einem Raume aufstellt, in welchem keine starken Schwankungen der Wärme und der Wärme-Vertheilung eintreten, so erreicht man erfahrungmäfsig durch die Hinzufügung dieser Compensation eine wesentliche Verbesserung der Gänge.

Ich kann von einer durch Th. Tiede in Berlin nach Krügerschem System mit Barometer-Compensation versehenen Tiede'schen Pendeluhr, welche seit Anfang November 1877 auf dem Telegraphen-Amt zu Swinemünde Zeitballstation aufgestellt ist und jeden Morgen telegraphisch mit den Zeit-Angaben der hiesigen Sternwarte verglichen wird, eine soeben abgeschlossene Reihe von Gängen mittheilen, welche einen sehr günstigen Eindruck machen dürften.

Aus den Vergleichungen der Uhr an 32 aufeinander folgenden Tagen, von denen keiner ausgeschlossen worden ist, haben sich von Anfang November bis Anfang December folgende tägliche Gänge ergeben, welche bereits in Gruppen nach gewissen Mittelwerthen der zugehörigen Barometer-Stände geordnet worden sind:

Im Mittel aus	7	tägl.	Gäng.	b.	ein.	Bar.-St.	v.	746,2^{mm}	d.	durchsch.	tägl.	Gang	+1^{s},67
„ „ „	10	„	„	„	„	„	„	754,4	„	„	„	„	+1,68
„ „ „	8	„	„	„	„	„	„	763,3	„	„	„	„	+1,66
„ „ „	7	„	„	„	„	„	„	769,5	„	„	„	„	+1,65

Ohne Barometer-Compensation hätte die Uhr nach ihrem bei früheren Prüfungen constatirten Verhalten folgende Steigerung der

täglichen Gänge, von dem zu dem niedrigsten Barometer-Stand gehörigen Gange + 1^s,67 an gerechnet, ergeben müssen:

+ 1^s,67
+ 1,79
+ 1,93
+ 2,02

Es ist somit eine Amplitüde der barometrischen Wirkung im Maximal-Betrage von + 0^s,35 auf den verschwindend kleinen Betrag von — 0^s,02 reducirt worden, d. h. es ist höchstens eine sehr kleine barometrische Uebercompensation eingetreten.

Die zufälligen Schwankungen der täglichen Gänge in diesem Zeitraum haben sich auf eine wahrscheinliche Abweichung des einzelnen Ganges von dem Mittelwerth im Betrage von 0^s,06 gestellt, so dass die wahrscheinlichen Fehler jedes der obigen vier Partial-Mittel auf ungefähr 0^s,02 sich belaufen, was auch den übrig gebliebenen kleinen Unterschieden ungefähr entspricht.

Bei dem wahrscheinlichen Fehler eines täglichen Ganges im Betrage von 0^s,06 ist noch zu bedenken, dafs derselbe einen Fehler der telegraphischen Vergleichung der beiden Uhren im Betrage von mindestens 0^s,04 enthalten dürfte, so dafs auf die wirklichen Schwankungen des Ganges, welche bei dem für Aenderungen der Wärme und Luftdichtigkeit compensirten Pendel übrig geblieben sind, nicht viel mehr als 0^s,04 fallen dürfte, womit man gewifs zufrieden sein kann.

Einer solchen Pendeluhr kann man natürlich, auch wenn wegen telegraphischer Störungen mitunter mehrere Tage strenge Vergleichungen mit den Uhren der entfernten Sternwarte unmöglich sein sollten, für mehrere Tage die sichere Vorausbestimmung der Signalzeiten für die Schiffs-Chronometer anvertrauen, während dies bei einer für Barometer-Schwankungen nicht compensirten Uhr bei den bekannten enormen Veränderungen, welche im Herbste und im Frühjahr der Barometer-Stand an unseren Küsten erfährt, leicht zu Fehlern von ganzen Secunden führen könnte.

Von andern Seiten ist neuerdings die Erscheinung, dafs manche Pendeluhren keine merkliche Abhängigkeit des Ganges von den Luftdichtigkeits-Schwankungen zeigen, in dem Sinne behandelt worden, dass man die Ansicht aufgestellt hat, es könne diese Art von zufälliger barometrischer Compensation auch zu einer absichtlichen Verbesserung derjenigen Uhren, welche barometrische Abhängigkeit erkennen lassen, verwerthet werden; indessen dürfte bei näherer Erwägung dieser Weg der barometrischen Compensation doch nicht sehr aussichtsvoll sein, denn es ist klar, dafs die hinsichtlich einiger Pendeluhren behauptete Unabhängkeit des Ganges von den Luftdichtigkeits-Schwankungen (eine erschöpfende Untersuchung des Ganges einer solchen Pendeluhr mit Berücksichtigung aller Umstände scheint übrigens noch nicht publicirt worden zu sein), falls eine besondere Compensation dafür nicht angebracht ist, nur durch Gegenwirkungen, deren Träger der Schwingungs-Bogen des Pendels ist, hervorgebracht sein kann.

Während bei steigendem Barometer durch die Verminderung der beschleunigenden Kraft und durch die Vermehrung des Trägheits-Momentes des ganzen schwingenden Systems die Schwingungs-Dauer des Pendels vergröfsert wird, kann in der That durch die bei dichterer Luft allmählich eintretende Verminderung des Schwingungs-Bogens eine Beschleunigung der Schwingungs-Dauer hervorgebracht werden, welche jener Verzögerung entgegenwirkt.

Um die Elemente einer solchen Compensations-Wirkung etwas näher zu untersuchen, habe ich bei den Pendeluhren der hiesigen Sternwarte, welche im luftdichten Raume schwingen (worüber später Näheres mitzutheilen) folgende Beobachtungen über den Einfluſs von künstlichen Variationen der Luftdichtigkeit auf den Schwingungs-Bogen gemacht.

Ich hatte anfangs beobachtet, dass eine andauernde Zunahme des Barometer-Standes von 1 Pariser Zoll den halben Schwingungs-Bogen bei einem Anfangswerthe von etwa $40'$ um folgende Beträge verminderte:

bei 5 Zoll Druck um 1,4 Minuten
„ 8 „ „ „ 1,0 „
„ 11 „ „ „ 0,7 „
„ 16 „ „ „ 0,5 „
„ 19 „ „ „ 0,3 „

Hieraus ergiebt sich, dafs die Abnahme des Schwingungs-Bogens nahezu dieselbe gewesen ist, für ein bestimmtes Verhältnifs der Zunahme des Druckes zum Drucke selbst; denn wenn ich aus der eben gegebenen Zusammenstellung die Abnahme des halben Schwingungs-Bogens für eine Zunahme von $^1/_{20}$ des jedesmaligen Druckes berechne, ergeben sich folgende 5 Werthe:

bei 5 Zoll Druck 0,35 Minuten
„ 8 „ „ 0,40 „
„ 11 „ „ 0,38 „
„ 16 „ „ 0,40 „
„ 19 „ „ 0,29 „

Der Mittelwerth aus diesen sehr nahe mit einander übereinstimmenden Beträgen des Einflusses eines und desselben Verhältnifs-Werthes der Druck-Zunahme zum Druck selbst ist = 0,36 Minuten.

Nun betragen in der That die gröfsten Unterschiede, um welche in unserem Klima bei geringer Höhe über dem Meeres-Spiegel Barometer-Stände von einiger Dauer sich unterscheiden können, etwa $^1/_{20}$ des mittleren Barometer-Standes, so dafs sich in dem Schwingungs-Bogen einer Pendeluhr von nicht zu abweichenden Form- und Gewichts-Verhältnissen und bei einem halben Schwingungs-Bogen von 40′ bis 50′ Schwankungen barometrischen Charakters höchstens bis zum Betrage von 0′,4 zeigen können.

Bei weiterer Verfolgung des Gegenstandes hatten Theorie und Erfahrung es wahrscheinlich gemacht, dafs sogar bei sehr verschiedenen Nebenumständen, zu welchen ich besonders die Echappements-Einrichtungen rechne, zwischen den Variationen des Schwingungs-Bogens (a soll im Folgenden immer den halben Schwingungs-Bogen bezeichnen) und den Variationen des Luftdruckes b die folgende einfache Beziehung obwaltet:

$$\frac{d\,a}{a} = -\frac{d\,b}{b} \times f \ldots$$

wo f ein von dem Schwingungs-Bogen und dem Barometer-Stand unabhängiger und, wie es scheint, nur von stärkeren Verschiedenheiten der Form und der Massenvertheilung des Pendels beeinflufster Factor ist, für welchen die beiden von mir untersuchten einander sehr ähnlich geformten Pendel trotz sehr verschiedener Echappements einen nahe übereinstimmenden Werth ergeben haben.

Aus der Integration obiger Gleichung folgt zur Bestimmung des Zahlenwerthes von f, wenn für den Barometer-Stand b_1 der Schwingungs-Bogen a_1 und für den Barometer-Stand b_2 der Schwingungs-Bogen a_2 beobachtet ist, die einfache Gleichung:

$$f = \frac{\log a_1 - \log a_2}{\log b_2 - \log b_1}$$

Hat man in einer und derselben Reihe von Experimenten für eine gröfsere Anzahl von sehr verschiedenen Barometer-Ständen die zugehörigen Schwingungs-Bogen ermittelt, so wird der einer ganzen Beobachtungs-Reihe am Besten genügende Werth von f alsdann unter Einführung eines den sämmtlichen Beobachtungen sich anpassenden Anfangs- oder Mittel-Werthes des Schwingungs-Bogens a_0 als einer zweiten Unbekannten in gewöhnlicher Weise nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt.

Ich bemerke noch, dafs bei diesen Beobachtungen stets dafür Sorge getragen worden ist, dafs die Verdünnungen oder Verdichtungen der Luft, durch welche die Variationen des Schwingungs-Bogens hervorgebracht wurden, längere Zeit hindurch in beständiger Weise auf den Schwingungs-Bogen gewirkt hatten, da in der Regel etwa 24 Stunden erforderlich waren, um nach einer künstlich bewirkten Verdichtung oder Verdünnung der Luft um mehrere Zolle den neuen Gleichgewichts-Zustand des Schwingungs-Bogens zu erreichen. Die Pendeluhr, an welcher das Beobachtungs-Material für diese Untersuchungen besonders vollständig beschafft worden war, hatte für f aus fünf vollständig discutirten Beobachtungs-

Gruppen folgende Zahlenwerthe mit den zugehörigen wahrscheinlichen Fehlern ergeben:

Bei ein. mittl. Werthe d. Schwingungsb.						$a = 40'$ $f = 0{,}1724 \pm 0{,}0079$
„	„	„	„	„	„	$a = 45$ $f = 0{,}1678 \pm 0{,}0045$
„	„	„	„	„	„	$a = 51$ $f = 0{,}2022 \pm 0{,}0055$
„	„	„	„	„	„	$a = 60$ $f = 0{,}1804 \pm 0{,}0049$
„	„	„	„	„	„	$a = 68$ $f = 0{,}1734 \pm 0{,}0066$

Der Mittelwerth, nach den aus nebenstehenden wahrscheinlichen Fehlern berechneten Gewichten genommen, ergiebt sich hiernach:

$$f = 0{,}1790 \pm 0{,}0026.$$

Die Darstellung der zahlreichen einzelnen Beobachtungen der Schwingungs-Bogen durch diese Theorie läfst nur Fehler von wenigen Zehnteln der Bogenminute übrig, welche sich vollständig durch die damaligen Beobachtungs-Fehler erklären.

Berechnet man mit obigem Werthe von f für den Zahlenwerth $\frac{db}{b} = \frac{1}{20}$, welcher in der vorhergehenden ersten Reihe von Werthen da zu Grunde gelegt ist, den zu $a = 40'$ zugehörigen Werth $da = -af\frac{db}{b}$ ... so erhält man $da = 0{,}36$, während oben auf rohere Weise, aber ohne theoretische Annahmen ebenfalls abgeleitet war $da = 0{,}36$.

Jedenfalls läfst die vorstehende Reihe von Zahlenwerthen f in Betracht der wahrscheinlichen Fehler eine genügende Darstellbarkeit sämmtlicher Beobachtungen durch einen vom Schwingungsbogen unabhängigen, constanten Werth von f erkennen (vergleiche insbesondere den ersten und den letzten Werth) und bestätigt somit die theoretischen Annahmen in genügender Weise.

Für $\frac{db}{b} = \pm\frac{1}{20}$ folgt aber nach dieser Theorie und mit Eintragung des wahrscheinlichsten Werthes $f = 0{,}179$ folgende Reihe von Werthen für da:

bei $a = 40'$ $da = 0{,}4$
50 „ $= 0{,}5$
60 „ $= 0{,}5$
70 „ $= 0{,}6$
80 „ $= 0{,}7$
90 „ $= 0{,}8$
100 „ $= 0{,}9$
110 „ $= 1{,}0$
120 „ $= 1{,}1$
130 „ $= 1{,}2$
140 „ $= 1{,}3$
150 „ $= 1{,}4$

Diese Werthe stellen somit bei unserm Pendel die Grenzwerthe des Einflusses der gewöhnlichen Schwankungen der Luftdichtigkeit auf den halben Schwingungs-Bogen dar.

Das zweite durchaus ähnlich geformte Pendel hat aus einer bedeutend geringeren Anzahl von Beobachtungen, aber auch für die verschiedenen Schwingungs-Bogen mit hinreichender Uebereinstimmung den Mittelwerth $f = 0{,}17$ . . . . ergeben, welcher sich aber auf einen viel gröfseren Mittel- oder Anfangs-Werth des halben Schwingungs-Bogens, nämlich in runder Zahl auf $a = 120'$ bezieht, und dessen nahe Uebereinstimmung mit dem an dem analogen Pendel für Werthe von a zwischen $40'$ und $68'$ gefundenen Betrage $f = 0{,}179$ . . auch eine Bestätigung unserer Annahme liefert.

Soll also bei einer Pendeluhr durch die Abnahme des Schwingungs-Bogens, welche unter den obigen Voraussetzungen bei einem Steigen des Barometer-Standes um $^1/_{20}$, also in freier Luft um etwa 38^{mm} im Maximal-Betrage von 1—2 Minuten eintreten kann, die gleichzeitige Wirkung der Vermehrung der Dichtigkeit der Luft auf die Verminderung der relativen Schwere und auf die Vermehrung des Trägheits-Momentes des ganzen schwingenden Systems compensirt werden, so ist dies nicht denkbar, als wenn, da die beiden letzteren Wirkungen bei einer Vermehrung des Barometer-Standes um 38^{mm} eine Verzögerung des täglichen Ganges

von ungefähr $0^s,57$ bedingen, eine Abnahme des Schwingungs-Bogens um 1—2 Minuten eine Beschleunigung des täglichen Ganges von ebenfalls $0^s,57$ hervorbringt.

Eine Pendeluhr, bei welcher eine Verminderung des Schwingungs-Bogens um 1—2 Minuten eine Beschleunigung des täglichen Ganges von $0^s,5$ bis $0^s,6$ zur Folge hätte, würde aber von einer sehr fehlerhaften Einrichtung sein, denn bei einem so starken Einfluſs kleiner Variationen des Schwingungs-Bogens auf die Schwingungs-Dauer würden auch andere zufällige Veränderungen des Schwingungs-Bogens von demselben Betrage, wie der oben angegebene Einfluſs der Dichtigkeits-Schwankungen der Luft, zufällige Schwankungen des täglichen Ganges von mehreren Zehnteln der Zeitsecunde hervorbringen können.

Genauere fortlaufende Beobachtungen des Schwingungs-Bogens der besten Pendeluhren dürften aber ergeben, daſs in Folge der unvermeidlichen Veränderungen der Widerstände und Reibungen in den Werken und Echappements nicht nur unablässige, schnell vorübergehende Schwankungen im Betrage von 0,1—0,2 Bogen-Minute stattfinden, sondern auch in längeren Zeit-Intervallen Unterschiede der Mittel-Werthe der Schwingungs-Bogen eintreten, welche leicht 0,5 bis 1,0 Bogen-Minute erreichen, wenn nicht besondere Vorsichts-Maaſsregeln für alle diejenigen Einrichtungen, welche jene Variation beeinflussen können, getroffen sind.

Bedenkt man, daſs für ein zusammengesetztes Pendel dessen Schwingungs-Verlauf von dem des einfachen Pendels nicht wesentlich verschieden sein sollte, also keine starken Störungen des Schwingungs-Verlaufs durch das Echappement und die Aufhängungs-Feder erfahren sollte, bei dem häufig vorkommenden Werthe des halben Schwingungs-Bogens von $90'$ die Beschleunigung des täglichen Ganges für eine Abnahme des halben Schwingungs-Bogens von 1 Minute nur etwa $0^s,09$ betragen würde, so ist es einleuchtend, daſs die Aufgabe, vermöge des Einflusses der Dichtigkeits-Veränderungen der Luft auf den Schwingungs-Bogen den directen Einfluſs dieser Veränderungen auf die Schwingungs-Dauer zu

compensiren, nichts Anderes heifst, als dafs die Schwingung des Pendels der Uhr durch die Einrichtung des Echappements oder der Aufhängungs-Feder so starke Abweichungen von dem Schwingungs-Verlauf des einfachen Pendels erfahren soll, um für kleine Variationen des Bogens etwa 6—7 mal so starke Variationen der Dauer der Schwingung wie ein einfaches Pendel erleiden zu können.

Wollte man dagegen dem Pendel etwa eine derartige Form und Massen-Vertheilung geben, dafs es durch die Vermehrung der Dichtigkeit der Luft stärkere Abnahme des Schwingungs-Bogens als die oben beobachteten erfahren müfste, so würde dies schwerlich möglich sein, ohne gleichzeitig die den zweiten Theil des directen barometrischen Einflusses auf die Schwingungs-Dauer bestimmende Gröfse, nämlich das Verhältnifs des Trägheits-Momentes der mitschwingenden Luftmasse zu dem Trägheits-Momente des Pendels selbst, so stark zu vermehren, dafs auch die Gesammt-Wirkung der Verzögerungen, welche durch die stärkere Abnahme des Schwingungs-Bogens compensirt werden müfste, erheblich gesteigert sein würde.

Nach den obigen Darlegungen dürfte es daher geradezu für ein Zeichen der guten Einrichtung einer Pendeluhr gelten, wenn dieselbe den nach den obigen theoretischen Annahmen berechneten verzögernden Einfluſs einer Vermehrung der Dichtigkeit der Luft recht rein und vollständig erkennen läfst, weil daraus folgt, dafs Echappement und Aufhängung, welche jedenfalls die Sitze stark veränderlicher Störungen sind, einen sehr geringen Einfluſs auf den Verlauf der betreffenden Schwingungen üben.

Die Erklärung übrigens, weshalb bei manchen Uhren eine Barometer-Wirkung als nicht deutlich hervortretend erachtet wird, ist auch vielleicht darin zu suchen, dafs, wenn man eben die Gänge nicht nach Barometer-Ständen in geeigneten kürzeren Zeit-Intervallen ordnet, sondern die von Zeitbestimmung zu Zeitbestimmung in Intervallen von mehreren Tagen abgeleiteten Gänge, z. B. nur die wöchentlichen Gänge der Uhren zusammennimmt, der Barometer-Einfluſs sich deshalb nicht sehr deutlich zeigen kann, weil die

Mittelwerthe der Barometer-Stände in längeren Zeit-Intervallen, z. B. schon die wöchentlichen Mittelwerthe derselben in der Regel nur noch geringe Schwankungen zeigen.

Einen indirecten Beweis dafür, dafs der Einfluſs der Schwankungen der Luftdichtigkeit auf den Schwingungs-Bogen und vermöge dieses auf die Schwingungs-Dauer wenigstens bei unserer Pendeluhr Tiede Nr. 3 nur sehr gering sein kann, finde ich auch darin, dafs der Barometer-Coefficient, welcher aus Uhrgängen in längeren Zeit-Intervallen abgeleitet worden ist, sehr nahe übereinstimmt mit dem entsprechenden Einflusse sehr schneller Barometer-Schwankungen auf die stündlichen Gänge des Pendels.

In kürzeren Zeit-Intervallen haben die durch Veränderungen der Luftdichtigkeit entstehenden Veränderungen des Schwingungs-Bogens, da dieselben nach der Natur der Sache erst allmählig durch Anhäufung der Wirkungen ihre wahren Werthe erreichen, noch geringere Bedeutung, als in längeren Zeit-Intervallen, in welche ihrer Accumulation hinreichender Spielraum gewährt wird.

Die Uebereinstimmung des Einflusses von barometrischen Variationen auf die Gänge eines Pendels in kürzeren oder längeren Zeit-Intervallen ist also in der That ein Zeichen, dafs die Variationen des Schwingungs-Bogens keine erhebliche Rolle bei der betreffenden Pendeluhr spielen.

Natürlich kann man stündliche Gänge einer Pendeluhr nicht durch Zeitbestimmungen controliren, sondern nur dadurch, dafs man dieselbe mit der Genauigkeit von mindestens $0^s,005$ mit einer andern guten Uhr vergleicht, welche vor schnelleren Schwankungen der Luft-Dichtigkeit und der Luft-Temperatur vollständig sicher gestellt ist, nämlich mit einer Pendeluhr, die im luftdichten Raume und in nahezu constanter Tages-Temperatur aufgestellt ist. Solche Uhren besitzt die Berliner Sternwarte seit 1865, und da die Vergleichung der in freier Luft schwingenden Pendeluhr Tiede Nr. 3 mit einer dieser vor Barometer-Schwankungen vollständig gesicherten Uhren vermittelst elektrischer Registrirung von Stunde zu Stunde mit der Genauigkeit von $0^s,005$ geschehen konnte, so

sind die nachfolgenden Zahlen in der That in der oben erörterten Beziehung ziemlich maafsgebend.

Ich fand für die Schwingungs-Dauer von Tiede Nr. 3 aus mehrstündigen Intervallen abgeleitet und auf den täglichen Gang reducirt bei sehr starken Barometer-Schwankungen unter Anderm folgende Reihe:

Barometer	Täglicher Gang	Reducirt auf $336^{p.L.}0$
$329^{p.L.}4$	$-0^{s},71$	$-0^{s},47$
331,1	— 0,65	— 0,48
334,2	— 0,56	— 0,49
337,1	— 0,44	— 0,48
341,0	— 0,33	— 0,50

Reducirt man diese Gänge mit Hilfe des oben aus dem Gange der Uhr in längeren Zeit-Intervallen gefundenen Barometer-Coefficienten auf einen mittleren Barometer-Stand, so erhält man dafür die in der 3. Columne stehenden Werthe des täglichen Ganges, welche eine genügende Uebereinstimmung zeigen und damit die Gültigkeit jenes Coefficienten auch für den Einfluſs von Luftdichtigkeits-Schwankungen schnelleren Verlaufs erweisen.

Bei diesem Anlass, wo es sich um die Frage der Möglichkeit einer Compensation des barometrischen Einflusses auf eine Pendeluhr durch besondere Einrichtungen des Echappements oder der Aufhängung handelt, erlaube ich mir, noch Folgendes zu bemerken.

Gerade im Gegensatze zu einer Lösung der oben erörterten Aufgabe, bei welcher den Variationen des Bogens ein möglichst groſser Einfluſs auf die Variationen der Dauer der Schwingungen gegeben werden müſste, erscheint es als ein zu erstrebendes Ziel, entweder durch die Einrichtung der Aufhängungs-Feder oder des Echappements dahin zu wirken, daſs wenigstens ein osculirender Isochronismus erreicht werde d. h. daſs die Schwingungs-Dauer von kleinen Schwankungen des Schwingungs-Bogens um einen bestimmten Mittelwerth herum möglichst unabhängig werde.

Es erscheint mir jedoch ziemlich aussichtslos, dies durch Vermehrung des Einflusses der Aufhängungs-Feder auf den Schwin-

gungs-Verlauf erreichen zu wollen, denn die Feder ist, insbesondere in Betracht der elastischen Nachwirkungs-Erscheinungen überhaupt der schwächste Punkt der Zeit-Messungs-Apparate, wie man nicht nur an den unablässigen Gang-Aenderungen der Chronometer, sondern auch an stets erneuten Aenderungen des Ganges vieler Pendeluhren beobachten kann, wenn eine neue Feder zu arbeiten anfängt oder selbst wenn eine alte Feder nach einiger Ruhe wieder in Schwingungs-Arbeit versetzt wird. Je dünner die Federn, abgesehen von der sonstigen zweckmäfsigen Zubereitung, genommen werden, einen desto geringeren Einflufs werden ihre Biegungen und in Folge dessen auch die Variationen ihrer Elasticitäts-Zustände, einschliefslich der Nachwirkungen, auf den Verlauf der Pendel-Schwingungen üben.

Nimmt man stärkere Federn, durch welche unter Umständen osculirender Isochronismus in der Nähe von gewissen Werthen des Schwingungs-Bogens erreicht werden kann, so macht man die Schwingungs-Dauer auch von der Veränderung der Zustände der Federn in längeren oder kürzeren Zeit-Intervallen stärker abhängig, und man wird dadurch meistens ebenso viel an Beständigkeit und einfacher Gesetzmäfsigkeit des Ganges in Beziehung zu anderen mefsbaren Zuständen verlieren, als man durch Verminderung des Einflusses kleiner Variationen des Bogens auf die Dauer der Schwingungen gewonnen hat.

Anders ist es mit den Echappements-Einrichtungen. Es erscheint möglich, durch besondere Einrichtungen des Echappements, deren Aufsuchung allerdings immer mehr eine Sache des Versuchs als der theoretischen Vorausbestimmungen bleiben wird, osculirenden Isochronismus zu erreichen.

Einen Fingerzeig hierfür bietet u. A. ein Resultat der Discussion der Gänge unserer Pendeluhr Tiede Nr. 3, welches aus den Zeitbestimmungen der letzten beiden Jahre 1875—1877 neuerdings von Herrn Dr. Becker abgeleitet worden ist.

In der in dem Monats-Bericht der hiesigen Akademie der Wissenschaften Mai 1867 erschienenen Abhandlung hatte ich aus

ziemlich kleinen Variationen des Schwingungs-Bogens und zugehörigen beobachteten Variationen des Ganges dieser Pendeluhr geschlossen, dafs bei ihr der Einfluſs von Variationen des Bogens auf die Dauer der Schwingungen nahezu derselbe sei, wie ihn die Theorie beim einfachen mathematischen Pendel verlange, und ich hatte daraus auf die Güte der Echappements-Einrichtung geschlossen, im Gegensatz zu dem Echappement eines an derselben Stelle beschriebenen elektrischen Pendels, bei welchem den sonstigen Vorzügen der Einrichtung ein viel stärkerer Einfluſs von Variationen des Bogens auf die Dauer der Schwingungen gegenüberstand. Die damaligen Resultate bezüglich der Pendeluhr Tiede Nr. 3 waren indessen, weil die Variationen des Bogens verhältnifsmäfsig gering gewesen waren, nicht sehr concludent. Auch bedurften die dort gegebenen Zahlenwerthe einer nachträglichen Correction, indem es leider übersehen worden war, dafs die Eintheilung des Grad-Bogens am Pendel eine arbiträre und nicht eine genaue Winkel-Eintheilung gewesen war.

In den letzten beiden Jahren hat nun ein ungünstiger Zustand dieser Pendeluhr die Gelegenheit gewährt, den Einfluſs stärkerer Variationen des Bogens auf die Dauer der Schwingungen zu beobachten. In Folge von Ursachen, die nicht vollkommen aufgeklärt sind, die vielleicht mit der oben erwähnten Hinzufügung einer elektrischen Unterbrechungs-Einrichtung zusammenhängen, war schon seit einigen Jahren, besonders aber sehr deutlich seit 1875, eine nahezu der Temperatur folgende starke periodische Variation des Schwingungs-Bogens bis zu 15 Bogen-Minuten jährlich eingetreten. Herr Dr. Becker, dem die vollständigere Mittheilung der hierüber von ihm geführten Untersuchungen, sobald dieselben in jeder Beziehung abgeschlossen sein werden, vorbehalten bleibt, hat mir aus der Discussion der Gänge der Uhr bei den verschiedenen Schwingungs-Bogen das vorläufige Resultat zur Veröffentlichung übergeben, dafs der tägliche Gang u in Funktion des halben Schwingungs-Bogens, welcher mit a bezeichnet ist, bei dieser Uhr gegenwärtig folgenden Ausdruck hat:

$$u = -0^s,742 + 0^s,0616\,(a-95') + 0^s,00405\,(a-95')^2 \ldots$$

Der Zahlenwerth 0,0616 hat den wahrscheinlichen Fehler 0,0022

„ „ 0,00405 „ „ „ „ 0,00052

In folgender Tabelle sind nach dieser Gleichung die Zahlenwerthe derjenigen kleinen Veränderungen des täglichen Ganges der Uhr aufgestellt, welche einer Variation des Schwingungs-Bogens um eine Minute bei den verschiedenen vorkommenden Anfangs-Werthen des halben Schwingungs-Bogens entsprechen. Daneben sind die Zahlenwerthe gestellt, welche für dieselben Elemente aus der Theorie des einfachen mathematischen Pendels folgen.

Halber Schw.-Bg.	Empirische Formel	Theoretische Formel für das einfache Pendel
$a = 100'$	$\frac{du}{da} = 0{,}102$	$\frac{du}{da} = 0{,}091$
98	0,086	0,090
96	0,070	0,088
94	0,053	0,086
92	0,037	0,084
90	0,021	0,082
88	0,004	0,080
etc.		

Hieraus ist zu erkennen, daſs die Pendeluhr zwischen $a = 80'$ und $= 90'$ unter der Wirkung des Echappements einen Verlauf der Schwingung annimmt, bei welchem ein osculirender Isochronismus eintritt. Eine Bestätigung dieses Resultates ist auch ohne Rechnung aus der Zusammenstellung der Gänge zu entnehmen, da dieselben sofort erkennen lassen, daſs in der Nähe eines halben Schwingungs-Bogens von $90'$ die den unablässigen kleinen Variationen des Schwingungs-Bogens, der mit der Genauigkeit von etwa 0,5 beobachtet ist, entsprechenden Variationen der Schwingungs-Dauer bedeutend geringer sind, als bei den gröſseren Schwingungs-Bogen.

Uebrigens wird fast jede Pendeluhr einen anderen Verlauf

des Einflusses der Variationen des Bogens auf die Dauer der Schwingungen erkennen lassen, je nach den Einrichtungen und Zuständen der Aufhängung und des Echappements, und derjenige Werth des Bogens, bei welchem erfahrungsmäfsig ein Minimum des Differential-Quotienten $\frac{du}{da}$ eintritt, wird wahrscheinlich auch nur für die Zustände, unter denen gerade die beobachteten Variationen des Bogens eintreten, volle Geltung haben; indessen wird sich voraussichtlich doch in vielen Fällen die Möglichkeit ergeben, durch kleine Variationen der bestimmenden Umstände solche Werthe des Bogens aufzusuchen, in deren Nähe der Quotient der Variation der Dauer durch die Variation der Weite der Schwingung möglichst klein ist, wobei es sich allerdings noch um die ziemlich complicirte Frage handeln wird, in welchem Functions-Verhältnifs die bei der Natur der betreffenden Einrichtungen unvermeidlichen Variationen des Bogens zu den jedesmaligen Anfangs-Werthen des Bogens selber stehen.

Es würde z. B. illusorisch sein, einen beobachteten Osculations-Punkt des Isochronismus in dem Schwingungs-Verlauf eines Pendels praktisch verwerthen zu wollen, wenn bei dem betreffenden Werthe des Bogens die unvermeidlichen Variationen des Verhältnisses der Widerstände zu den Triebkräften gröfsere absolute Variationen des Schwingungs-Bogens hervorbrächten als an anderen Stellen, an welchen der erwähnte Quotient selbst ungünstiger, aber der Betrag der absoluten Variationen des Bogens kleiner wäre.

Es dürfte jetzt, wo man in Bezug auf die Einflüsse der Wärme- und Dichtigkeits-Aenderungen des umgebenden Mediums, wie ich zeigen werde, eine bedeutend gröfsere Beständigkeit der Schwingungs-Bedingungen sicher erreichen kann, an der Zeit sein, alle diese Fragen, sowie überhaupt den ganzen Verlauf der Schwingungen des Pendels einschliefslich der Abweichungen derselben vom Planum u. s. w. einer näheren Untersuchung zu unterwerfen, da, je genauer man die Variationen der Schwingungs-Bogen beobachtet, und je näher man der feineren Messung des Verlaufes der

Geschwindigkeiten und Richtungen innerhalb der Schwingungs-Curve tritt, um so deutlicher sich erkennen läfst, dafs eine Menge noch unenträthselter Gang-Veränderungen, welche bei constantem Thermometer, constantem Barometer und constantem Schwingungs-Bogen beobachtet werden, von diesen feineren Bedingungen des ganzen Schwingungs-Verlaufs abhängen.

Unter Anderen lassen sich mit grosser Sicherheit bei feinen Ablesungen des Schwingungs-Bogens, die man leicht bis auf wenige Bogen-Secunden treiben kann, die Einflüsse periodischer Glieder erkennen, die auf die Umdrehung gewisser Räder des Werkes u. s. w. als Ursachen hinweisen u. a. m.

Zur genaueren Beobachtung der Variationen des Schwingungs-Bogens wird jetzt nach dem Vorschlage von Herrn Professor Tietjen auf der Berliner Sternwarte ein sehr einfaches und genaues Verfahren, über welches mir anderweitige Mittheilungen noch nicht bekannt geworden sind, angewandt.

Der Bogen ist an dem Pendel selbst befestigt und in Intervallen von etwa 15 Minuten statt mit Strichen mit feinen kreisrunden Oeffnungen versehen, welche von hinten durch geeignete Spiegel-Vorrichtungen zur bequemeren Unterscheidung in verschiedenen Farben beleuchtet werden. Mit einem vor dem Pendel angebrachten Mikroskop mifst man alsdann den linearen, leicht in Bogen zu verwandelnden Abstand, um welchen bei der Schwingung des Pendels die Stillstands- oder Umkehr-Punkte zweier an verschiedenen Enden des Bogens gelegenen farbigen Kreise von einander entfernt bleiben. Es ist klar, dafs eine Messung der Variationen dieses Abstandes genügt, um die Variationen des Schwingungs-Bogens zu bestimmen, und dafs keinerlei feste Stellung des Mikroskops, als während der Dauer von einigen Schwingungen, um die schon innerhalb einer Schwingung perfect werdenden Einstellungen etwa wiederholen zu können, erforderlich ist.

Ein Theil der Abweichungen der Schwingungen vom Planum wird im Anschlufs an den Vorschlag von Herrn Professor Newcomb (A. N. Nr. 1940) in der Weise gemessen, dafs an dem Pendel ein

Spiegel befestigt ist, vermittelst dessen während der Schwingung das Bild einer feinen Theilung, die sich an der Objectiv-Fassung des Mikroskops befindet, in der Mikrometer-Ebene des Mikroskops abgebildet wird. Die kleinen Oscillationen dieses Bildes zeigen wenigstens einen Theil der Abweichungen der Schwingungen vom Planum und lassen wenigstens vermuthen, ob irgend eine merkliche Ellipticität der Schwingung eingetreten ist, da eine solche bei der Natur der Pendel-Aufhängung wohl kaum ohne kleine periodische Neigungs-Aenderungen des erwähnten Spiegels vor sich gehen würde.

Es bleibt, wenn man den Schwingungs-Verlauf ganz vollständig verfolgen will, übrig, die etwaigen Abweichungen der Schwingungen vom Planum u. s. w. noch vollständiger zu messen. —

Mittelst der oben erwähnten Einrichtung wird jetzt der Schwingungs-Bogen der im folgenden Abschnitt zu erwähnenden im luftdichten Raume aufgestellten Pendeluhren der Berliner Sternwarte etwa mit der Genauigkeit von 1—2 Bogensecunden gemessen, und es haben sich auch bereits deutliche, wenngleich an den Grenzen der Meſsbarkeit stehende Abweichungen der Schwingungen vom Planum bei derselben Uhr ergeben. Bisher ist es allerdings nicht gelungen, Beziehungen zwischen Veränderungen der letzteren Abweichungen und den Veränderungen des Ganges zu finden, dagegen hat die genaue Beobachtung des Schwingungs-Bogens ein wesentliches Controlmittel für die Discutirung der beobachteten Gänge in einer früher nicht entfernt erreichten Schärfe gegeben.

IV.

Nachdem im vorangehenden Abschnitt die bei einer automatischen Compensation der barometrischen Einflüsse auf den Gang einer Pendeluhr zu berücksichtigenden Verhältnisse erörtert worden sind, will ich nunmehr darlegen, in welcher Weise gegenwärtig die Zeitmessung auf der Berliner Sternwarte von dem Einflusse der Dichtigkeitsschwankungen der Luft befreit ist.

Aufser den starken Einflüssen der Dichtigkeitsschwankungen

hatte die Untersuchung des Ganges der Pendeluhr Tiede Nr. 3 auch die Mängel aller Wärmecompensationen gegenüber den Wirkungen schneller Temperaturänderungen sehr deutlich erkennen lassen.

Es ist den Astronomen längst bewufst geworden, dafs die üblichen Compensationen der Pendeluhren gegen Wärmeänderungen nur einen summarischen Charakter haben, dagegen, wenn die Temperatur sich schneller ändert, und insbesondere, wenn in Verbindung mit starken Temperaturverschiedenheiten und schnellen Temperaturänderungen sich Schichtungen von stark verschiedenen Temperaturen in dem Raume ergeben, in welchem die Pendeluhr sich befindet, die besten Compensationen grobe Fehler machen können, was insbesondere auch zu berücksichtigen ist, wenn man Pendeluhren durch stärkere und schnellere Aenderungen der Heizung in geschlossenen Räumen auf ihre Wärmecompensationen prüft.

Es zeigt sich deutlich, dafs in den Uebergangszeiten solcher Heizungszustände, so lange insbesondere noch Schichtungen von stärkeren Temperaturabstufungen stattfinden, die bestcompensirten Pendeluhren so arbeiten, als ob sie bedeutend untercompensirt wären, weil in der Regel das eine der beiden compensirenden Elemente überwiegend in der Nähe des einen Pendel-Endes wirksam ist.

Diejenigen Unvollkommenheiten der Compensation dagegen, welche bei schnellen Temperaturänderungen ersichtlich werden, beruhen bekanntlich darauf, dafs meistens, abgesehen von den Verschiedenheiten der Wärmeleitungsfähigkeit u. s. w. der beiden compensirenden Elemente, das Verhältnifs der Oberflächen zu den Massen bei denselben ein sehr verschiedenes ist, z. B. bei der Stahlstange und dem Quecksilbergefäfs des Quecksilberpendels, so dafs das eine Element der Compensation den Temperaturänderungen meistens erheblich schneller folgt, als das andere.

Als Folge aller dieser Verhältnisse wird die Erscheinung hervortreten, dafs eine Pendeluhr, welche in einer jährlichen Temperaturperiode keinen merklichen directen Einflufs der Temperatur

mehr ergiebt, doch die schneller veränderliche Wirkung der täglichen Temperaturperiode noch ganz deutlich zeigen kann.

Von unserer Pendeluhr Tiede Nr. 3 z. B. kann man, da ihr Gang während zweier Jahre sich fast nur als eine Function des Barometerstandes erwiesen hat, gewifs behaupten, dafs ihre summarische Compensation perfect sei; dennoch zeigt sich, dafs die Uhr, wenn man aus zwei um 24 Stunden von einander abstehenden Nachtbeobachtungen unter der Voraussetzung eines in der Zwischenzeit gleichförmigen Uhrganges die Uhrcorrection für den dazwischenliegenden Mittag berechnet und diesen Werth mit dem aus Sternen, die kurz vor oder nach Mittag beobachtet werden, direct bestimmten vergleicht, durchschnittlich um Mittag $0^s,15$ voraus ist gegen den aus den Nachtbeobachtungen unter der Annahme genauer Compensation berechneten Stand.

Die Unabhängigkeit eines solchen Resultates von den Annahmen über die Oerter der in der Nacht und um Mittag beobachteten Sterne läfst sich bekanntlich dadurch erweisen, dafs sich dasselbe Resultat bei Beobachtungen, welche in entgegengesetzten Punkten des Jahres angestellt werden, wiederfindet.

In Folge solcher Erwägungen und Wahrnehmungen mufste es für den Fortschritt, welcher durch eine barometrische Compensation beabsichtigt wurde, als eine wesentliche Ergänzung erscheinen, dafs zugleich eine solche Aufstellung der Pendeluhr erreicht wurde, durch welche dieselbe vor schnellen Temperaturänderungen und vor Temperaturschichtungen im umgebenden Medium möglichst gesichert werden konnte.

Eine gewisse Constanz der Temperatur kann man nun leicht auch in geheizten Räumen erreichen, aber man wird es nur sehr schwer erreichen können, die verticalen Temperaturabstufungen, welche mit den Heizungen zusammenhängen, in hinreichend kleiner Amplitüde und hinreichend constant zu erhalten.

Es wurde deshalb, um auch der Wärmecompensation die günstigsten Umstände darzubieten, nothwendig, wie es ja auch anderweitig schon geschehen ist, eine Aufstellung in Räumen von

einer durch gehörige Isolirung und starkes Mauerwerk hinreichend gesicherten Constanz der Temperatur, welche natürlich nicht absolut zu sein braucht, sondern eigentlich nur während eines oder mehrerer Tage erforderlich ist, einzurichten, um insbesondere auch durch die Trägheit und Gleichartigkeit der Temperatur der umgebenden Medien veränderliche Schichtungen der Temperatur zu verhindern. Leider sind aber solche Aufstellungen meist mit anderen Gefahren, z. B. von starken Wirkungen der Feuchtigkeit, verbunden.

Gerade den letzteren kann man aber durch die Aufstellung der Uhren in einem luftdichten Gehäuse vorbeugen, indem man der Luft innerhalb des Gehäuses durch bekannte Mittel einen grofsen Theil ihres Wassergehaltes entzieht, so dafs irgendwie erhebliche Condensationsbildungen selbst bei jährlichen Temperaturschwankungen von 10 bis 15 Centigraden nicht mehr stattfinden können. Die Befürchtung, dafs alsdann in so getrockneter Luft durch stärkere Verdunstung des für die Mechanismen unentbehrlichen Oeles ungünstigere Zustände herbeigeführt werden könnten, ist nach den von uns gemachten Erfahrungen nicht von Erheblichkeit. Man wird natürlich die Uhr ebenso wenig in absolut trockner Luft wie in einer Minimalverdünnung derselben arbeiten lassen, sondern sich auf mäfsige Verdünnungen und Trocknungen beschränken, um bei den unter den erwähnten Umständen hinreichend langsam und gering zu erhaltenden Temperaturschwankungen ausreichende Sicherung zugleich gegen stärkere Condensationen des Wassers und gegen schnellere Verdunstungen des Oeles zu gewinnen. Auch giebt es bekanntlich Echappements, bei deren Anwendung das Oel ganz entbehrt werden kann.

Dagegen gewährt die Aufstellung einer Pendeluhr im luftdichten Raum auch in mehreren anderen Beziehungen, insbesondere in der gröfseren Sicherheit gegen Staub und Unreinigkeiten aller Art, wodurch unter Anderm auch die Wirksamkeit gewisser elektrischer Unterbrechungseinrichtungen länger erhalten wird, so bemerkliche Vorzüge, dafs man unter den günstigsten Umständen,

nämlich auf festen Sternwarten, wo die Hilfe geschickter Mechaniker stets zur Hand ist, an der Zweckmäfsigkeit solcher Einrichtungen nicht zweifeln kann.

Im Laufe des Jahres 1865 wurde die erste Aufstellung dieser Art auf der Berliner Sternwarte durch Herrn F. Tiede eingerichtet und zwar zunächst, weil man in Bezug auf die luftdichte Ausführung der Aufziehvorrichtungen, sowie hinsichtlich der Haltbarkeit des Oeles einige Bedenken hatte, für eine Pendeluhr, deren Krafterneuerung nicht durch ein Gewicht, sondern auf elektromagnetischem Wege bewirkt wurde.

Die Beschreibung der elektro-magnetischen Echappementseinrichtung dieser Tiede'schen Pendeluhr habe ich in Nr. 1636 der Astr. Nachrichten veröffentlicht, und eine gröfsere Reihe von Beobachtungsresultaten über den Gang derselben und über die Haltbarkeit der luftdichten Aufstellung ist in dem eingangs erwähnten Monatsbericht der hiesigen Akademie der Wissenschaften mitgetheilt worden.

Etwa zwei Jahre nach der Aufstellung dieser Pendeluhr wurde von Herrn F. Tiede auch eine Pendeluhr mit Aufziehungsvorrichtung und Graham-Echappement im luftdichten Raume hergestellt. Beide Pendeluhren haben seitdem wiederholt bei längeren Beobachtungsreihen vermittelst regelmäfsiger Vergleichungen mit der im Meridianzimmer aufgestellten Pendeluhr Tiede Nr. 3 zur Sicherung der Rectascensionsmessungen erhebliche Hilfe geleistet; dennoch war bis in die neueste Zeit hinein trotz der hinlänglich sicher erreichten Luftdichtigkeit des Verschlusses und der entsprechenden Unabhängigkeit der Uhrgänge von den Luftdichtigkeitsschwankungen eine vollkommen befriedigende mehrjährige Continuität der Gänge nicht erreicht worden. Insbesondere hatte sich immer deutlicher gezeigt, dafs das Pendel mit elektro-magnetischem Echappement die ausgezeichneten Leistungen, welche in dem mehrerwähnten Monatsbericht der Akademie mitgetheilt worden sind, nur in kürzeren Zeitintervallen gewährte, während in längeren Zeitintervallen die Uebelstände der Oxydation der Contacte u. s. w.

doch nicht genügend überwunden wurden, und überdies, wie an den erwähnten Orten näher beschrieben ist, die Einrichtung des Echappements den Variationen des Bogens zu grofsen Einfluſs auf die Dauer der Schwingungen gestattete.

Bei der mit Gewichtswerk und gewöhnlichem Graham-Echappement versehenen anderen Pendeluhr, bezeichnet mit D, war anfangs eine erhebliche Verzögerung der definitiven Regulirung durch die groben Unsicherheiten entstanden, welchen die Temperatur-Compensationen mittelst Zink und Stahl unterworfen sind.

Sowohl beim Stahl als inbesondere beim Zink kommen bekanntlich so starke Verschiedenheiten der Ausdehnungscoefficienten, beim Zink auch vielleicht so starke Veränderungen desselben, im Laufe der Zeit vor, daſs nur selten eine Combination dieser beiden Metalle in ihrem Verhalten gegen die Temperatur den Voraussetzungen der Rechnung entspricht, zumal dann stärkere Abweichungen zeigt, wenn nicht von den bei einem bestimmten Pendel verwendeten Metallen in fertigem Zustande die Ausdehnungscoefficienten direct bestimmt worden sind.

Bei den Temperaturwirkungen, denen eine Pendeluhr im luftdichten Raume unterworfen ist, kommt aber noch ein secundärer Einfluſs zur Geltung, welcher von vornherein nur sehr schwer in Rechnung zu ziehen ist.

In dem verschlossenen Raum ändert sich zwar nicht mehr die Dichtigkeit der Luft, d. h. die Anzahl der vorhandenen Gastheilchen, aber der Gasdruck bleibt doch nicht constant, sondern ändert sich in dem bekannten ziemlich ansehnlichen Procentbetrage mit der Temperatur, so daſs man bei vollkommener Dichtigkeit des Verschlusses die Barometerablesungen sogar als Temperaturbestimmungen verwerthen kann.

Diese Veränderungen der Luftspannung im Pendelraume haben zwar mit den beiden hauptsächlichen und den Zahlenwerthen nach weit überwiegenden barometrischen Einflüssen, die von Bessel in Rechnung gestellt worden sind, nichts mehr zu thun; denn die letzteren entstehen nur aus solchen Veränderungen der Luftspan-

nung, welche mit einer Vermehrung der Anzahl der Massentheilchen in demselben Raume verbunden sind; dagegen wirken jene Veränderungen der Luftspannung durch die mit ihnen verbundenen Veränderungen der Hemmungen des Pendels auf den Schwingungs-Bogen ein, wenn auch nur in dem geringen Betrage, wie er oben auf Grund besonderer Versuche nachgewiesen worden ist. Wenn dieser letztere Einfluſs in den obigen Erörterungen gegen die anderen beiden barometrischen Störungen des Pendels als relativ unbedeutend bezeichnet werden konnte, so ist er doch an sich nicht ganz zu vernachlässigen, denn Veränderungen des Schwingungs-Bogens selbst von kleinen Bruchtheilen der Minute afficiren die täglichen Gänge der Uhren meistens schon um einige Hundertel der Secunde. Wenn es sich blos um die Spannungs-Aenderungen trockener Luft im Pendelraume handelt, kann man leicht berechnen, daſs eine Temperaturänderung von 13 bis 14 Centigraden schon genügt, um die Spannung der eingeschlossenen Luft um $^1/_{20}$ ihres Werthes zu verändern, somit gesetzmäſsige Variationen des Schwingungs-Bogens von merklichen Bruchtheilen einer Minute hervorzurufen, welche natürlich bei den stärkeren Temperaturschwankungen, die man bei Compensationsprüfungen zur Anwendung bringt, die in freier Luft berichtigte Compensation des Pendels im geschlossenen Raum merklich unzureichend machen können.

Auſserdem haben bei der Pendeluhr D die Versuche über die zweckmäſsige Gestaltung der Echappements und der elektrischen Unterbrechungsvorrichtungen längere Zeit an dem stetigen Betrieb der neuen Zeitmessungseinrichtung im luftdichten Raume gehindert.

Endlich gab die genauere Beobachtung der Schwingungs-Bogen mit der Zeit das unabweisliche Resultat, daſs das vorhandene Graham-Echappement nicht ausreichend war, um der Uhr unter den sonstigen überaus günstigen Umständen, unter welchen sie arbeiten konnte, die genaueste Leistung zu ermöglichen.

Es wurde daher endlich ein anderes Echappement, und zwar von der Gattung der sogenannten Gravity-Escapements in einer

von Herrn F. Tiede besonders modificirten Gestalt, in welcher dasselbe ohne Gefahr zugleich als elektrische Unterbrechungsvorrichtung fungirt, statt des Graham-Echappements eingeführt.

Seitdem scheint nun der ganze Schwingungsverlauf einen hohen Grad von Beständigkeit erreicht zu haben, und in dieser Verfassung ist die Uhr nunmehr seit etwa $1^3/_4$ Jahren in stetigem Betrieb gewesen.

Ueber alle Resultate dieser Betriebszeit wird ausführlicher berichtet werden, sobald ein gewisser Abschluſs dieses Beobachtungsmaterials erreicht ist.

Ich will an dieser Stelle nur die allgemeine Mittheilung machen, daſs die Herstellung eines sehr stetigen und regelmäſsigen, von anderen, bequem und sicher meſsbaren Faktoren in einfachster Weise abhängigen Pendelganges durch die vorhandene Einrichtung jetzt in einem unerwartet hohen Grade erreicht zu sein scheint. Die Uhr hat viele Monate lang tägliche Gänge ergeben, welche in überaus einfacher Abhängigkeit entweder von der Zeit oder von der Temperatur oder dem Schwingungs-Bogen so dargestellt werden können, daſs die übrig bleibenden nicht weiter durch Rechnung darstellbaren, somit in gewissem Sinne als „zufällig“ zu bezeichnenden Schwankungen durchschnittlich nur $0^s,01$ bis $0^s,02$ betragen haben. In wiederholten Fällen haben sich sogar mehrere Wochen lang tägliche Gänge ergeben, welche unmittelbar und ohne irgend eine Reductionsformel nur durchschnittliche Abweichungen vom Mittelwerthe im Betrage von $0^s,02$ gezeigt haben, so daſs man, da alle Störungsursachen, die der täglichen Periode folgen, unbedingt eliminirt sind, auch auf eine vorzügliche Genauigkeit der von guten Beobachtern nach dieser Uhr angestellten Bestimmungen von fundamentalen Rectascensions-Differenzen wird rechnen können.

Insbesondere gewährt die in Rede stehende Uhr bedeutend gesichertere Grundlagen für die im öffentlichen Zeitdienst erforderlichen Vorausbestimmungen.

Zur Exemplification theile ich nachfolgend eine 12 Wochen

umfassende Reihe von täglichen Gängen mit, welche in den letzten Monaten, also während der für regelmäfsige Zeitbestimmungen ungünstigen Zeit des Jahres beobachtet worden sind:

1877	October 25 — 29	täglicher Gang	— $1^s,46$
	October 29 — Novbr. 2	„ „	— 1,45
	November 2 — 5	„ „	— 1,45
	November 5 — 15	„ „	— 1,45
	November 15 — 22	„ „	— 1,45
	November 22 — 28	„ „	— 1,51
	November 28 — Dezember 7	„ „	— 1,51
	December 7 — 12	„ „	— 1,48
	December 12 — 17	„ „	— 1,49
	December 17 — 22	„ „	— 1,53
	December 22 — 29	„ „	— 1,52
1877	December 29 — 1878 Januar 10	„ „	— 1,53
1878	Januar 10 — 15	„ „	— 1,53
		Mittelwerth	— $1^s,49$

Wahrscheinliche Unsicherheit eines einzelnen beobachteten Werthes des täglichen Ganges $0^s,02$.

Die Beständigkeit des luftdichten Verschlusses ist nach mehreren früheren Beobachtungsreihen von ununterbrochener etwa einjähriger Dauer so vollkommen verbürgt, dafs man nach Jahr und Tag den Barometer-Stand bis auf das Zehntel der Pariser Linie wiederfinden kann. (Siehe hierüber auch die Monatsberichte der Berliner Akad. d. Wissenschaften Mai 1867.)

In dem letzterwähnten bis jetzt $1^3/_4$ Jahr andauernden Zeit-Intervall ununterbrochenen Betriebes ist dagegen allerdings die Dichtung des Verschlusses nicht vollkommen gelungen gewesen. Vielmehr hat sich allmählich ein langsames Eindringen von Luft

gezeigt, welches aber mit einer so merkwürdigen Regelmäfsigkeit vor sich geht, dafs es von Interesse erschienen ist, dem Phänomen seinen Lauf zu lassen, und die sehr geringfügigen der Zeit fast vollkommen proportionalen Wirkungen desselben nur in Rechnung zu stellen. In je 10 Tagen steigt das Barometer nämlich nur um etwa eine halbe Linie, und in gewissen Phasen der jährlichen Temperatur-Bewegung wird auch diese Wirkung auf den täglichen Gang fast vollständig durch kleine, noch nicht beseitigte Wirkungen der Temperatur compensirt.

Uebrigens kann man leicht zeigen, dafs es eigentlich auch nur eines ungefähr luftdichten Verschlusses bedarf, um den Gang einer Pendeluhr von dem jedesmaligen Dichtigkeitszustande des Mediums, in welchem sie schwingt, fast vollkommen unabhängig zu machen.

Während nämlich nach meinen obigen Darlegungen in freier Luft von einer barometrischen Selbst-Compensation einer Pendeluhr durch die Gegenwirkung, welche mit der Abnahme des Schwingungs-Bogens verbunden ist, nicht wohl die Rede sein kann, liegt die Sache in dieser Beziehung viel günstiger bei geringeren Luftdichtigkeiten.

Bezeichnet man den Differential-Quotienten des täglichen Ganges einer Pendeluhr nach der Aenderung des Barometerstandes mit $\frac{du}{db}$, und unterscheidet man in diesem Ausdruck denjenigen Theil, welcher in einer Verzögerung des Ganges besteht, und welcher oben nach Bessels Entwickelung gleich $\{43200 \cdot C \cdot (1 + k)\}$ gefunden worden ist, durch die Bezeichnung $\left(\frac{du}{db}\right)_m$ von dem andern Theile des Ausdruckes, welcher in einer Beschleunigung des Pendelganges, vermittelt durch die Abnahme des Schwingungs-Bogens a, besteht und mit $\left(\frac{du}{db}\right)_a$ bezeichnet werden möge, so hat man für beide Ausdrücke, wenn man noch in dem ersteren Ausdruck für den constanten Factor $C \cdot (1 + k)$ kurz M setzt, die Gleichungen:

$$\left(\frac{du}{db}\right)_m = 43200\ M$$

$$\left(\frac{du}{db}\right)_a = \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{db}.$$

Da nun aber nach der oben entwickelten und empirisch bestätigten Relation $\frac{da}{db} = -\frac{fa}{b}$ ist, so hat man auch:

$$\left(\frac{du}{db}\right)_a = -\frac{du}{da} \times f\frac{a}{b}.$$

Sollen die barometrischen Störungen des Pendels sich untereinander ausgleichen, so mufs die Bedingung erfüllt sein $\left(\frac{du}{db}\right)_m = -\left(\frac{du}{db}\right)_a$ oder $43200 \cdot M = \frac{du}{da} \times f\frac{a}{b}$, was für denjenigen Barometerstand b, bei welchem diese barometrische Selbst-Compensation des Ganges der Pendeluhr stattfindet, die Gleichung ergiebt:

$$b = \frac{du}{da} \cdot \frac{f \cdot a}{43200 \cdot M}.$$

Hiernach kann man für jedes Pendel, bei welchem für einen bestimmten Werth a des halben Schwingungs-Bogens der Differentialquotient $\frac{du}{da}$ oder die Aenderung des täglichen Ganges für eine bestimmte Aenderung des halben Schwingungs-Bogens empirisch bekannt ist, und bei welchem der Factor f durch besondere Experimente ähnlich den oben dargelegten ermittelt ist, den Barometerstand berechnen, bei welchem Selbst-Compensation der barometrischen Variationen durch das Zusammenwirken der verschiedenen Einflüsse auf die einzelnen Elemente der Schwingungs-Dauer des Pendels eintritt, und bei welchem somit nur näherungsweise ein luftdichter Verschlufs in dem Sinne herzustellen ist, dafs für längere Zeit die Veränderungen des Barometerstandes klein genug bleiben, um für die obigen Differential-Beziehungen noch hinreichende Gültigkeit zu verbürgen. Bis zu Veränderungen von 20—30^{mm} wird dies sicher der Fall sein.

Beispielsweise würde für unser Pendel der Ausdruck $\left(\frac{du}{db}\right)_m$ oder das Product 43200 M, auf die Einheit eines barometrischen Incrementes von 1 Centimeter bezogen, den Zahlenwerth 0,15 besitzen.

Ferner beträgt nach den obigen Untersuchungen für dasselbe Pendel der Zahlenwerth von f 0,18.

Wird sodann angenommen, dafs für $a = 100$ Minuten $\frac{da}{du} = 0{,}10$ (d. h. dafs der tägliche Gang beim Wachsen von $a = 100'$ um $1'$ um $0^s{,}10$ zunimmt), so hat man den numerischen Ausdruck für denjenigen Werth des Barometerstandes b (in Centimeter ausgedrückt), für welchen osculirende Selbst-Compensation des Pendels gegen Veränderungen der Dichtigkeit der Luft stattfindet.

$$b = \frac{0{,}10 \times 0{,}18 \times 100}{0{,}15}.$$

Die Rechnung ergiebt also für unser Pendel

$$b = 120^{mm}.$$

Wenn man also in einem mit nahezu luftdichtem Verschlufs versehenen Pendel-Raum durch Auspumpen der Luft den Barometerstand b auf 120 Millimeter erniedrigt, so hat man, wenn selbst die Dichtung nicht vollkommen gelungen ist, unter obigen Voraussetzungen den Vortheil, die Einwirkung geringer Veränderungen des Barometerstandes im Pendel-Raume auf den täglichen Gang vollkommen vernachlässigen zu können.

Für die beiden Pendeluhren, welche auf der Berliner Sternwarte im luftdichten Verschlufs arbeiten, ist mehrmals das Vorhandensein eines solchen Osculations-Punktes der Selbst-Compensation für die barometrischen Variationen in solcher Uebereinstimmung mit der Theorie, wie der immerhin etwas unsicher bestimmbare Zahlenwerth $\frac{du}{da}$ gestattet, experimentell erkannt worden.

Will man bei nicht andauernd verbürgter Dichtung des Verschlusses von dieser Selbst-Compensation wirklich Gebrauch machen, was übrigens bei der vollkommen sicher erreichbaren Dichtung mittelst eines Glascylinders nur ganz ausnahmsweise erforderlich sein dürfte, so wird es das Einfachste sein, den Osculations-Punkt b rein empirisch durch Versuche mit der Luftpumpe zu bestimmen und alsdann die Pendeluhr in einem Medium von der diesem Barometerstande b entsprechenden Dichtigkeit, wenn auch nur mit approximativer Sicherung dichten Verschlusses, schwingen zu lassen.

Untersuchungen über das Fraunhofer'sche Aequatorial.

I.

Der Untersuchung unseres Aequatorials wurden folgende Formeln zu Grunde gelegt, welche mit kleinen Vervollständigungen den von Bessel (Astr. Untersuchungen Bd. I) und den von Hansen (Abhandl. d. Sächs. Akad. der Wissenschaften 1855) bereits aufgestellten entsprechen:

$$\left.\begin{aligned}\alpha = {} & U + \Delta U - (T+\gamma) + c\sec\delta + n\,\mathrm{tg}\,\delta + \beta'\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta \\ & + \beta'\cos\varphi\cos(T+\gamma) + \chi\sin(T+\gamma-\sigma)\,\mathrm{tg}\,\delta \\ & - \beta\cos\varphi\sin\tau\sec\delta - \frac{k\,\mathrm{tg}\,M}{\sin(\psi+\delta)}\sec\delta\end{aligned}\right\}\ \text{K. V.}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha = {} & U' + \Delta U - (T'+\gamma) - c\sec\delta - n\,\mathrm{tg}\,\delta - \beta'\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta \\ & - \beta'\cos\varphi\cos(T'+\gamma) + \chi\sin(T'+\gamma-\sigma)\,\mathrm{tg}\,\delta \\ & - \beta\cos\varphi\sin\tau\sec\delta - \frac{k\,\mathrm{tg}\,M}{\sin(\psi+\delta)}\sec\delta\end{aligned}\right\}\ \text{K. F.}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta = {} & D + \Delta D - \frac{1}{2}\left\{c + n + \beta'\sin\varphi + \chi\sin(T+\gamma-\sigma)\right\}^2\mathrm{tg}\,\delta\sin 1'' \\ & - \chi\cos(T+\gamma-\sigma) - \beta\sin\varphi\,\frac{\cos(\psi+\delta)}{\cos\psi} - k\,\mathrm{cotg}(\psi+\delta)\end{aligned}\right\}\ \text{K. V.}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta = {} & 180^0 - (D'+\Delta D) - \frac{1}{2}\left\{c+n+\beta'\sin\varphi - \chi\sin(T'+\gamma-\sigma)\right\}^2\mathrm{tg}\,\delta\sin 1'' \\ & - \chi\cos(T'+\gamma-\sigma) - \beta\sin\varphi\,\frac{\cos(\psi+\delta)}{\cos\psi} - k\,\mathrm{cotg}(\psi+\delta)\end{aligned}\right\}\ \text{K. F.}$$

(I)

Hierin bedeuten:

α und δ die scheinbare Rectascension und Declination des im Collimations-Mittelpunkte des Gesichtsfeldes eingestellten Objectes.

U, T und D die unmittelbaren Ablesungen der Uhr und der Kreise beziehungsweise des Stundenkreises und des Declinationskreises. Ueber die Art der Ablesung s. S. 170.

Ohne Strich beziehen sich diese Bezeichnungen auf die Lage K. V. des Instrumentes, bei welcher das Kreisende der Declinationsaxe dem Objectivende des Fernrohrs im Sinne der täglichen Bewegung voraufgeht.

Dieselben Buchstaben mit einem Strich versehen gehören zu der entgegengesetzten Lage K. F. (Kreisende folgend).

Der Stundenkreis ist zweimal von 0^h bis 12^h beziffert. In den Gleichungen wird aber der Quadrant von T und von T' stets so anzunehmen sein, dafs bis auf Gröfsen von der Ordnung der Instrumentalfehler und der Refraction

$$T = U + \Delta U - \alpha \ldots.$$
$$T' = U' + \Delta U - \alpha \ldots.$$

ΔU die Uhrcorrection auf Sternzeit.

γ die constante Correction der Ablesung des Stundenkreises, d. h. $\tau - \frac{T+T'}{2}$, wenn τ den Stundenwinkel bezeichnet, und wenn die Declination des beobachteten Objectes sowie der Stundenwinkel sehr nahe Null ist.

ΔD die Correction der Ablesung des Declinationskreises, d. h. $90° - \frac{D+D'}{2}$.

c den Collimationsfehler, welcher positiv zu nehmen ist, wenn die Objectivrichtung der Collimationslinie mit dem Kreisende der Declinationsaxe einen Winkel über 90° bildet.

n die Abweichung der Declinationsaxe von der zur Stundenaxe normalen Richtung, positiv gezählt, wenn das Kreisende der Declinationsaxe dem Nordpole der Stundenaxe näher ist als 90°.

β' die Biegung der Declinationsaxe, nämlich den Winkelbetrag, um welchen das dem Kreisende gegenüberliegende und das Fernrohr tragende Ende derselben in Folge der Schwere sich senkt.

β die Durchbiegung des Fernrohres, nämlich den Winkelbetrag, um welchen das Objectivende desselben gegen das Ocularende durch die Schwere sich senkt.

χ den Winkel zwischen der Hauptaxe des Instrumentes und der Erdaxe. (Abstand des Poles des Instrumentes vom Himmelspole.)

σ den Stundenwinkel des Poles des Instrumentes.

ψ und M die bekannten Hülfsgröfsen, welche sich aus den Gleichungen

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{cotg} \varphi \cos \tau,$$

$$\cos M = \sin \varphi \sec \psi \text{ oder } \sin M = \cos \varphi \sin \tau$$

bestimmen.

k den Refractionscoefficienten, welcher aus der Besselschen Tafel (Astr. Unters. Bd. I, pag. 198) mit dem Argumente „wahre Zenithdistanz" aus der mit α' bezeichneten Columne, natürlich unter Hinzufügung der meteorologischen Correctionen, zu entnehmen ist.

Die in den Formeln erforderlichen Umsetzungen von Zeit in Winkelmaafs und umgekehrt sind als selbstverständlich nicht besonders hervorgehoben, und die Glieder von der Ordnung des Quadrates der Refraction und der Producte derselben mit den Instrumentalfehlern sind vernachlässigt.

Nunmehr sollen die Formeln zusammengestellt werden, welche zur Bestimmung der in den Gleichungen (I) enthaltenen Gröfsen dienen, soweit die letzteren nicht schon durch die obigen Festsetzungen genügend definirt sind.

1) Die Indexfehler γ und ΔD.

Zur Bestimmung des Indexfehlers am Stundenkreise beobachtet man einen Stern im Aequator in beiden Kreislagen und er-

hält mit Hülfe der Uhr und des Stundenkreises im Mittel aus der ersten und zweiten Gleichung der Gruppe (I)

$$\text{(II)} \quad \gamma = \tfrac{1}{2}[U - T + U' - T'] - \alpha + \Delta U - (\beta \cos \varphi \sin \tau + k \operatorname{tg} \tau).$$

Daher wird γ frei von Biegung und Refraction ermittelt, wenn man den Aequatorstern in zwei zum Meridian symmetrischen Lagen beobachtet.

Die Vorschriften zur Bestimmung des Indexfehlers ΔD am Declinationskreise ergeben sich aus der umstehenden Definitionsgleichung.

Zu bemerken ist nur, dafs sowohl Himmelsobjecte als terrestrische Zeichen benutzt werden können, und dafs D die Ablesung des Declinationskreises in derjenigen Lage des Instrumentes ist, bei welcher die Kreisablesungen mit zunehmender Declination wachsen.

Ist ein Himmelsobject für die Einstellungen D und D' benutzt, so wird statt der einfachen Formel

$$\Delta D = 90° - \frac{D + D'}{2}$$

die genauere

$$\text{(III)} \quad \Delta D = 90° - \frac{D + D'}{2} + \chi \sin\left(\frac{T + T'}{2} - \sigma\right) \sin \frac{T' - T}{2} + k \frac{\operatorname{cotg}(\psi + \delta) - \operatorname{cotg}(\psi' + \delta)}{2}$$

anzuwenden sein. Das von dem Fehler der Aufstellung des Instrumentes herrührende Correctionsglied

$$+ \chi \sin\left(\frac{T + T'}{2} - \sigma\right) \sin\left(\frac{T' - T}{2}\right)$$

ist aus der folgenden Tafel zu entnehmen, welche für $\chi = 100''$ berechnet ist:

Tafel um die Correction von ΔD für den Einflufs der Fehler der Aufstellung zu ermitteln:

$$+\chi \sin\left(\frac{T+T'}{2}-\sigma\right)\sin\frac{T'-T}{2} \text{ für } \chi = 100''.$$

$\frac{T+T'}{2}-\sigma$	$\frac{T'-T}{2}=+4^m$	$\frac{T'-T}{2}=+6^m$	$\frac{T'-T}{2}=+8^m$	$\frac{T'-T}{2}=+10^m$	$\frac{T'-T}{2}=+12^m$	$\frac{T+T'}{2}-\sigma$
$+\ 0^h\ 0^m$	$+0''{,}0-$	$+0''{,}0-$	$+0''{,}0-$	$+0''{,}0-$	$+0''{,}0-$	$-\ 0^h\ 0^m$
1	+0,5 −	+0,7 −	+0,9 −	+1,1 −	+1,4 −	− 1
2	+0,9 −	+1,3 −	+1,7 −	+2,2 −	+2,6 −	− 2
3	+1,2 −	+1,9 −	+2,5 −	+3,1 −	+3,7 −	− 3
4	+1,5 −	+2,3 −	+3,0 −	+3,8 −	+4,5 −	− 4
5	+1,7 −	+2,5 −	+3,4 −	+4,2 −	+5,0 −	− 5
6	+1,8 −	+2,6 −	+3,5 −	+4,4 −	+5,2 −	− 6
7	+1,7 −	+2,5 −	+3,4 −	+4,2 −	+5,0 −	− 7
8	+1,5 −	+2,3 −	+3,0 −	+3,8 −	+4,5 −	− 8
9	+1,2 −	+1,9 −	+2,5 −	+3,1 −	+3,7 −	− 9
10	+0,9 −	+1,3 −	+1,7 −	+2,2 −	+2,6 −	−10
11	+0,5 −	+0,7 −	+0,9 −	+1,1 −	+1,4 −	−11
$+\ 12^h\ 0^m$	+0,0 −	+0,0 −	+0,0 −	+0,0 −	+0,0 −	$-\ 12^h\ 0^m$

Das von der Refraction herrührende Correctionsglied für ΔD

$$+k\,\frac{\operatorname{cotg}(\psi+\delta)-\operatorname{cotg}(\psi'+\delta)}{2}$$

kann in der Nähe des Meridians beinahe stets vernachlässigt werden, sonst läfst es sich durch passende Tabulirung des Werthes $k\operatorname{cotg}(\psi+\delta)$ für verschiedene Stundenwinkel und Declinationen leicht berechnen.

2) Der Collimationsfehler c, die Neigung n und die Biegung der Declinationsaxe β'.

Die Bestimmung der Gröfsen c, n und β' geschieht durch Beobachtung von Sternen verschiedener Declination im Meridian und

in dem dazu rechtwinkeligen Stundenkreise in beiden Lagen des Instrumentes.

Man erhält dann eine Anzahl Bedingungsgleichungen von der Form

$$\text{(IV)}\quad \frac{U'-U}{2}-\frac{T'-T}{2}-\frac{\Delta\alpha'-\Delta\alpha}{2}+\chi\,\mathrm{tg}\,\delta\cos\left(\frac{T'+T}{2}+\gamma-\sigma\right)\sin\frac{T'-T}{2}$$
$$= c\sec\delta+n_1\,\mathrm{tg}\,\delta+\beta'\cos\varphi\cos t,$$

welche nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln sind.

In der Gleichung (IV) ist $\frac{\Delta\alpha'-\Delta\alpha}{2}$ nämlich die Refractionsdifferenz im Meridian $=\frac{U'-U}{2}k\sin 1'\cos\varphi\sec(\varphi\mp\delta)\sec\delta\begin{cases}\text{O.C.}\\ \text{U.C.}\end{cases}$

im Stundenwinkel 6^h oder $18^h=\frac{U'-U}{2}k\sin 1'\,\mathrm{cotg}^2\,\varphi\,\mathrm{cosec}^2\,\delta$.

Hierbei ist

$\frac{\Delta\alpha'-\Delta\alpha}{2}$ in Zeitsecunden,

$\frac{U'-U}{2}$ in Zeitminuten

ausgedrückt.

Ferner ist

$n_1=n+\beta'\sin\varphi$

und t folgt aus der Definitionsgleichung $\cos T+\cos T'=2\cos t$.

Zur Ermittelung der Gröfse

$$+\chi\,\mathrm{tg}\,\delta\cos\left(\frac{T'+T}{2}+\gamma-\sigma\right)\sin\frac{T'-T}{2}$$

dient die folgende Tafel, welche für $\chi\,\mathrm{tg}\,\delta=10{,}0$ berechnet ist:

$\frac{T'+T}{2}+\gamma-\sigma$	$\frac{T'+T}{2}=+4^m$	$\frac{T'-T}{2}=+8^m$	$\frac{T'-T}{2}=+12^m$	$\frac{T'+T}{2}+\gamma-\sigma$
	s	s	s	
$+\ 0^h\ 0^m$	+0,70	+1,40	+2,09	$-\ 0^h\ 0^m$
30	0,69	1,38	2,06	30
1 0	0,67	1,35	2,02	1 0
30	0,64	1,28	1,92	30
2 0	0,60	1,21	1,81	2 0
30	0,55	1,10	1,65	30
3 0	0,49	0,99	1,48	3 0
30	0,42	0,85	1,27	30
4 0	0,35	0,70	1,05	4 0
30	0,27	0,53	0,80	30
5 0	0,18	0,36	0,54	5 0
30	+0,09	+0,18	+0,27	30
6 0	0,00	0,00	0,00	6 0
30	−0,09	−0,18	−0,27	30
7 0	0,18	0,36	0,54	7 0
30	0,27	0,53	0,80	30
8 0	0,35	0,70	1,05	8 0
30	0,42	0,85	1,27	30
9 0	0,49	0,99	1,48	9 0
30	0,55	1,10	1,65	30
10 0	0,60	1,21	1,81	10 0
30	0,64	1,28	1,92	30
$+\ 11^h\ 0$	0,67	1,35	2,02	$-\ 11^h\ 0$
30^m	−0,69	−1,38	−2,06	30^m

3) Die Gröfsen χ, σ und β.

Zur Ermittelung von χ und σ werden die Relationen eingeführt:

$$\xi = \chi \cos \sigma$$

$$\eta = \chi \sin \sigma.$$

Hiernach bestimmt man ξ aus Sternbeobachtungen entweder in der Nähe des Meridians mit Hülfe des Declinationskreises oder

in der Nähe von 6^h und 18^h Stundenwinkel mit Hülfe des Stundenkreises und ausschliefslicher Benutzung von dem Pol sehr nahen Sternen.

Im ersten Falle erhält man, wenn d die instrumentale Declination eines Sternes, d. h. $D + \Delta D$ oder $180° - (D' + \Delta D)$ bezeichnet, ein Gleichungssystem von der Form

$$\left.\begin{aligned} \xi \pm \beta \sin(\varphi \mp \delta) = \pm (d - \delta) - k \operatorname{tg}(\varphi \mp \delta) \\ - \eta \operatorname{tg}\left(\frac{T + T'}{2} + \gamma\right) \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{O. C.} \\ \text{U. C.} \end{matrix} \qquad (V^a)$$

aus welchem nach der Methode der kleinsten Quadrate die Gröfsen ξ und β bestimmt werden können.

Die in diesen und den folgenden Gleichungen auf der rechten Seite auftretenden ausschliefslich mit sehr kleinen Factoren multiplicirten Werthe von η oder ξ werden leicht näherungsweise beschafft.

Im zweiten Falle findet man eine Anzahl Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} \xi - \beta \cos\varphi \operatorname{cosec}\delta = \Big\{\alpha - (U - T + \Delta U - \gamma)\Big\} \operatorname{cotg}\delta \\ - (n_1 + c \operatorname{cosec}\delta) - \eta \operatorname{tg}(T + \gamma - 6^h) + \Delta x \end{aligned}\right\} \text{für } 6^h$$

$$\left.\begin{aligned} \xi - \beta \cos\varphi \operatorname{cosec}\delta = \Big\{(U' - T' + \Delta U - \gamma) - \alpha\Big\} \operatorname{cotg}\delta \\ - (n_1 + c \operatorname{cosec}\delta) - \eta \operatorname{tg}(T' + \gamma - 18^h) + \Delta x \end{aligned}\right\} \text{für } 18^h \qquad (V^b)$$

Das in diesen Gleichungen enthaltene Δx ist aus der weiter unten gegebenen Tafel zu entnehmen.

Zur Bestimmung von η findet man aus Stundenkreis-Ablesungen in der Nähe des Meridians unter ausschliefslicher Benutzung von dem Pol sehr nahen Sternen:

$$\left.\begin{aligned} \eta = \pm \left(\frac{U + U'}{2} - \frac{T + T'}{2} + \Delta U - \gamma - \alpha\right) \operatorname{cotg}\delta \\ + \xi \operatorname{tg}\left(\frac{T + T'}{2} + \gamma\right) + \Delta y - \Delta x \operatorname{tg}\left(\frac{T + T'}{2} + \gamma\right) \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{O. C.} \\ \text{U. C.} \end{matrix} \qquad (VI^a)$$

und durch Declinationskreis-Ablesungen in der Nähe von 6^h oder 18^h Stundenwinkel:

$$\eta \pm \beta \sin\varphi \cos\delta = \pm(d-\delta) + \xi \operatorname{tg}\left(\frac{T+T'}{2} + \gamma - 6^h\right) \mp k \operatorname{cotg}(\psi+\delta) \Big\{ \begin{matrix} 6^h \\ 18^h \end{matrix} \quad \text{(VI}^b\text{)}$$

Die Tafel zur Berechnung von Δx und Δy beruht auf folgenden Ausdrücken:

$$\Delta y = -k \cos\delta \sin\tau \qquad \Delta x = -k \frac{\cos\delta \cos\tau}{\sin^2\varphi} + k \operatorname{cotg}\varphi$$

	Δy			Δx			
τ	$\delta = 88^\circ 30'$	$\delta = 87^\circ 30'$	$\delta = 86^\circ 30'$	$\delta = 88^\circ 30'$	$\delta = 87^\circ 30'$	$\delta = 86^\circ 30'$	τ
0^h	$-0''{,}0$	$-0''{,}0$	$-0''{,}0$	$+41''{,}9$	$+40''{,}3$	$+38''{,}7$	0^h
1	0,4	0,7	0,9	42,0	40,4	38,9	1
2	0,8	1,3	1,8	42,3	40,8	39,5	2
3	1,1	1,8	2,5	42,6	41,4	40,4	3
4	1,3	2,2	3,1	43,1	42,3	41,6	4
5	1,5	2,4	3,4	43,7	43,3	42,9	5
6	1,5	2,5	3,5	44,3	44,3	44,4	6
7	1,5	2,4	3,4	44,9	45,3	45,9	7
8	1,3	2,2	3,1	45,5	46,3	47,2	8
9	1,1	1,8	2,5	46,0	47,2	48,4	9
10	0,8	1,3	1,8	46,4	47,8	49,3	10
11	$-0{,}4$	0,7	0,9	46,6	48,2	49,9	11
12	$+0{,}0$	$+0{,}0$	$+0{,}0$	$+46{,}7$	$+48{,}4$	$+50{,}1$	12
13	0,4	0,7	0,9	46,6	48,2	49,9	13
14	0,8	1,3	1,8	46,4	47,8	49,3	14
15	1,1	1,8	2,5	46,0	47,2	48,4	15
16	1,3	2,2	3,1	45,5	46,3	47,2	16
17	1,5	2,4	3,4	44,9	45,3	45,9	17
18	1,5	2,5	3,5	44,3	44,3	44,4	18
19	1,5	2,4	3,4	43,7	43,3	42,9	19
20	1,3	2,2	3,1	43,1	42,3	41,6	20
21	1,1	1,8	2,5	42,6	41,4	40,4	21
22	0,8	1,3	1,8	42,3	40,8	39,5	22
23	0,4	0,7	0,9	42,0	40,4	38,9	23
0^h	$+0{,}0$	$+0{,}0$	$+0{,}0$	$+41{,}9$	$+40{,}3$	$+38{,}7$	0^h

Die Grösen Δy und Δx enthalten den Einfluſs der mittleren Refraction auf die Bestimmungen von ξ und η aus den Ablesungen

des Stundenkreises unter ausschliefslicher Benutzung der dem Pol sehr nahen Sterne. Die obige bequeme Form der Refractionsberechnung für diese ganz besonderen, aber für die Bestimmung der Instrumentalfehler sehr günstigen Fälle ist durch Vernachlässigung der Producte aus der Refraction und den zweiten Potenzen der Poldistanzen entstanden. Um für die vorkommenden Temperatur- und Luftdruckzustände die wahren Werthe von Δy und Δx aus den mittleren zu erhalten, wendet man die bekannten Hülfsmittel der Bessel'schen Refractions-Tafeln an.

Im Uebrigen wird sich die Abkürzung der den sämmtlichen Ausdrücken unter I. 3 zu Grunde liegenden Reihenentwickelungen durch sehr einfache Erwägungen rechtfertigen. Es ist dabei angenommen worden, dafs es sehr leicht durchführbar ist, die Beobachtungen so einzurichten, dafs die Ablesungen, insbesondere auch $\frac{T+T'}{2}$, nur um wenige Zeitminuten früher oder später fallen, als die entsprechenden Hauptepochen 0^h, 6^h, 12^h, 18^h.

II.

Die Anwendung der im vorangehenden Abschnitt zusammengestellten Formeln hat bei der Untersuchung des Fraunhofer'schen Aequatorials, über dessen Einrichtungen theils der I. Band der Berliner Beobachtungen, theils die Beschreibungen des ganz entsprechenden Instruments der Dorpater Sternwarte Auskunft geben, in den Jahren 1856—58 zu den folgenden Ergebnissen geführt:

1) Die Indexfehler γ und ΔD.

1857 Jan. 8	$\gamma = -8{,}5^s$	1857 Febr. 7	$\gamma = -3{,}5^s$
	$-8{,}1$		$-3{,}8$
„ 21	$-5{,}7$	„ 17	$-3{,}8$
„ 24	$-4{,}3$	„ 20	$-3{,}3$
„ 31	$-5{,}1$	Mai 15	$-2{,}1$
	γ wurde verändert.		
1857 Juli 29	$\gamma = -6{,}1$	1858 Febr. 11	$\gamma = -9{,}8$
	$5{,}9$		$10{,}0$

Der Kreis wird mit Nonien unmittelbar bis auf eine halbe Zeitsecunde abgelesen. Die mitgetheilten Werthe von γ entsprechen dem Mittel aus den Ablesungen der beiden Nonien und resultiren aus je drei Einzelbestimmungen. Die Excentricität war ziemlich grofs und etwas veränderlich. Bekanntlich ist der betreffende Stundenkreis zugleich das Bewegungsmittel für das Mikrometer und Uhrwerk. Bei Betrachtung der längeren Reihe 1857 Januar 8 — Mai 15 ergiebt sich eine ziemlich stetige Veränderung von γ, deren Sinn sich auch in der 2. Reihe bestätigt. Danach verändern sich die Werthe des Indexfehlers γ mit steigender Temperatur nach der positiven Seite hin.

1857 Jan.	7	ΔD = +	2″,4	im Mittel aus	9	Bestimmungen
„	8	+	1,2	„ „ „	10	„
„	21	—	1,6	„ „ „	9	„
„	31	—	4,7	„ „ „	3	„
Febr.	7	—	1,2	„ „ „	5	„
„	17	+	1,1	„ „ „	1	„
„	20	+	8,0	„ „ „	5	„
Mai	15	—	12,7	„ „ „	4	„

Der Indexfehler wurde corrigirt.

1857 Juli	2	ΔD = —	5″,1	im Mittel aus	1	Bestimmungen
„	29	—	6,3	„ „ „	1	„
„	39	—	9,8	„ „ „	2	„
Febr.	11	+	3,2	„ „ „	4	„

Die Ablesung des Declinationskreises geschieht mit 4 Nonien, deren jeder unmittelbar 4″ angiebt.

Der Indexfehler ΔD ergiebt sich hiernach als nicht sehr veränderlich; doch ist auch hier eine Temperaturwirkung angedeutet. Bei steigender Temperatur erfolgt eine Veränderung in negativer Richtung. Zur Beurtheilung der Genauigkeit, welche man bei Declinationsbeobachtungen mit dem Kreise dieses Aequatorials erreichen kann, diene die folgende Zusammenstellung der einzelnen Werthe von ΔD:

Januar 7.		Januar 8.		Januar 21.	
α Urs. min.	$+7''{,}4$	η Urs. maj.	$-2''{,}2$	η Urs. maj.	$-1''{,}7$
β Urs. min.	$+3{,}9$	β Urs. min.	$+7{,}6$	10 Draconis	$-2{,}4$
α Geminorum	$+2{,}5$	α Urs. min.	$+2{,}3$	β Urs. min.	$-4{,}3$
δ Geminorum	$+5{,}6$	α Geminorum	$+0{,}9$	α Urs. min.	$-4{,}6$
α Can. min.	$+1{,}5$	δ Geminorum	$+3{,}1$	α Geminorum	$+0{,}8$
δ Orionis	$+3{,}1$	α Can. min.	$-2{,}0$	α Can. min.	$+0{,}0$
β Orionis	$-2{,}6$	δ Orionis	$-4{,}2$	δ Orionis	$-3{,}7$
α Leporis	$+3{,}5$	β Orionis	$-5{,}6$	γ Can. maj.	$-0{,}1$
ε Can. maj.	$+1{,}6$	α Leporis	$+4{,}9$	ε Can. maj.	$+1{,}3$
		ε Can. maj.	$+6{,}5$		
	$\Delta D = +2''{,}4$		$\Delta D = +1''{,}2$		$\Delta D = -1''{,}6$

Aus dieser Zusammenstellung ergiebt sich der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Bestimmung von ΔD zu $2''{,}4$, und daraus folgt für den wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Ablesung D für die instrumentale Declination $3''{,}4$. Dieser Fehler erscheint etwas grofs, wenn man die obigen Angaben über die Nonien-Ablesung in Betracht zieht. Zur Erklärung dient der Umstand, dafs die Aufstellung des Instrumentes sich im weiteren Verlaufe der Beobachtungen sehr veränderlich gezeigt hat. Den Einfluſs dieser Veränderlichkeit zwischen den zusammengehörigen Einstellungen und Ablesungen D und D' auf die Genauigkeit der Bestimmung von ΔD erkennt man am besten aus folgender am 11. Febr. 1858 beobachteten Reihe, bei welcher es bereits möglich war, das Maafs dieser Veränderlichkeit ziemlich zutreffend mit Hülfe von Niveau-Ablesungen in Rechnung zu ziehen (siehe unten).

ΔD behaftet mit der schnellen Veränderlichkeit der Fehler der Aufstellung.		ΔD corrigirt für die schnelle Veränderlichkeit der Fehler der Aufstellung.
δ Urs. min.	$+8''{,}8$	$+3''{,}7$
51 Cephei	$+8{,}8$	$+2{,}9$
ε Hydrae	$+4{,}4$	$+3{,}6$
W. IX. 206	$-1{,}8$	$+2{,}4$
	$\Delta D = +5''{,}05$	$\Delta D = +3''{,}2$
Mittlere Abweichung	$= 3''{,}75$	Mittlere Abweichung $= 0''{,}5$

Es ist noch zu erwähnen, dafs die Differenzen der Nonien für dieselbe Declinations-Stellung mit dem Stundenwinkel veränderlich waren und zwar bis zu 10″—50″. Der Grund hierfür liegt darin, dafs die Declinationsaxe in ihren cylindrischen Lagern einigen Spielraum hat und bei der Drehung des ganzen Instrumentes um die Stundenaxe den Einwirkungen der Schwere folgt.

2) Der Collimationsfehler c, die Neigung n und die Biegung des freien Endes der Declinationsaxe β'.

Wenn man die linke, aus den Beobachtungen folgende Seite der Gleichung (IV) [Seite 165] mit C bezeichnet, so erhält man Gleichungen von der Form

$$C = c \sec \delta + n_1 \operatorname{tg} \delta + \beta' \cos \varphi \cos t,$$

wo cos t in der unteren Culmination negativ zu nehmen ist.

Bevor jedoch die Beobachtungsreihen für C und die daraus folgenden Ableitungen von c, n_1 und β' mitgetheilt werden, mufs ein für diese Berechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nicht unwichtiger Punkt hervorgehoben werden. Die Gröfse C wird aus Beobachtungen von Sternen verschiedener Declination nicht mit derselben Genauigkeit bestimmt. Daher hat man bei der Vertheilung der Gewichte für C nicht nur auf die Anzahl der einzelnen Bestimmungen, sondern auch auf die Declinationen der beobachteten Objecte Rücksicht zu nehmen.

Bezeichnet man den wahrscheinlichen Fehler einer Bestimmung von C mit r_c, den Fehler, welcher bei der Beobachtung eines Sterndurchganges U oder U' begangen wird, mit r_t und den Fehler der Kreisablesung T oder T' mit r_l, so erhält man

$$r_c^2 = {}^1/_2 [r_t^2 + r_l^2].$$

Der Fehler r_l bleibt für alle Declinationen derselbe, während r_t von der Declination des beobachteten Objectes abhängig ist. Für Beobachtungen nach Auge und Ohr und für eine Vergröfserung von 214, welche zu den vorliegenden Beobachtungen benutzt wurde, ist nahezu anzunehmen:

$$r_t = \sqrt{(0^s,072)^2 + (0^s,014 \sec \delta)^2},$$

und da $\sqrt{r_t^2 + r_l^2}$, für den Aequator gültig, sich aus den Beobachtungen selber zu $0^s,30$ ergeben hat, so folgt schliefslich auch nahezu

$$r_c = \sqrt{\frac{(0^s,30)^2 + (0^s,014 \sec \delta)^2}{2}}.$$

Die Gewichte der Einzel-Bestimmungen von C sind proportional zu $\frac{1}{r_c^2}$ gesetzt. Wird dann nach dem für den Aequator gültigen r_c^2 die Einheit des Gewichtes bestimmt, so erhält man folgende Gewichte von C:

für	$\delta = 0°$,	$p = 1{,}00$
	30	1,00
	60	1,00
	70	0,98
	80	0,94
	85	0,78
	86	0,69
	87	0,56
	88	0,36
	88,5	0,23
für	$\delta = 89{,}0$	$p = 0{,}12$

Dieses Rechnungsverfahren unterscheidet sich etwas von demjenigen, welches Bessel bei der Behandlung eines ähnlichen Falles (Astron. Untersuchungen Band I, S. 58) angewendet hat. Bessel reducirt nämlich mit Hülfe des Factors cos δ sämmtliche beobachteten Werthe von C auf den Bogen gröfsten Kreises und führt sie dergestalt in die Bedingungsgleichungen ein. Das oben angegebene Verfahren ist wohl etwas genauer, weil es auch den Bestimmungen aus den Polsternen eine dem Sachverhalt entsprechendere Verwerthung sichert.

Im Folgenden sollen die Beobachtungen selbst mitgetheilt werden, welche nach den obigen Formeln für die Refraction und die Aufstellungsfehler des Instrumentes verbessert sind.

Was den Collimationsfehler c betrifft, so ist noch zu erwähnen, daſs derselbe bei einem Aequatorial, welches mit einem Fadenmicrometer ausgerüstet ist, für zwei entgegengesetzte Lagen des Micrometers verschieden ist, sobald das mittlere Fadenkreuz nicht in dem Rotationscentrum des ganzen Micrometers liegt. Der Abstand des Drehungsmittelpunktes von dem betreffenden Fadenkreuz wird leicht ausreichend bestimmt, indem man Durchgänge des Polarsternes in verschiedenen Drehungsphasen des Micrometers beobachtet. Dieser Abstand ergiebt dann die Reduction des in irgend einer Lage des Micrometers beobachteten Collimationsfehlers auf die Mitte des Gesichtsfeldes.

Bezeichnet man diejenige Stellung des Micrometers, bei welcher sich die Micrometerschraube über dem Fernrohre befindet, mit **S. I** und die entgegengesetzte Stellung des Micrometers mit **S. II**, wobei das ganze Instrument die Lage K. V. und das Objectivende des Fernrohres die Richtung nach Süden haben soll, so erhält man für unser Aequatorial während der nachstehenden Beobachtungen die folgenden Correctionen des Collimationsfehlers c:

in der Stellung	S. I	$\Delta c = -0^s,66$
„ „	S. II	$\Delta c = +0^s,66.$

Die folgenden Beziehungen beziehen sich beinahe sämmtlich auf die Stellung S. I des Micrometerapparates, durch die Werthe Δc sind dieselben jedoch mit den etwa in der Stellung S. II erhaltenen gleichartig gemacht.

Erste Beobachtungsreihe für C, angestellt zwischen 1856 Dec. 23 und 1857 Jan. 21.

Stern	δ	t	C	Mittel für jeden Stern
ε Can. maj.	$-28^{0}\,39'$	$0{,}0^{h}$	$+2{,}9^{s}$ $+4{,}2$ $+3{,}5$ $+3{,}8$	$+3{,}60^{s}$
α Leporis	$-17^{0}\,51'$	$0{,}0^{h}$	$+3{,}8^{s}$ $+1{,}7$ $+5{,}0$	$+3{,}50^{s}$
β Orionis	$-\ 8^{0}\,18'$	$0{,}0^{h}$	$+3{,}8^{s}$ $+3{,}2$ $+3{,}0$	$+3{,}33^{s}$
δ Orionis	$-\ 0^{0}\,21'$	$0{,}0^{h}$	$+2{,}7^{s}$ $+2{,}7$ $+2{,}9$ $+3{,}1$ $+2{,}2$ $+3{,}9$	$+2{,}91^{s}$
α Can. min.	$+\ 5^{0}\,39'$	$0{,}0^{h}$	$+3{,}2^{s}$ $+3{,}0$ $+3{,}7$	$+3{,}30^{s}$
δ Geminorum	$+22^{0}\,17'$	$0{,}0^{h}$	$+\ 3{,}1^{s}$ $+\ 4{,}5$ $+\ 3{,}8$	
η Tauri	$+23\ 41$	$0{,}0$	$+\ 3{,}9$ $+\ 3{,}7$	$+\ 3{,}77^{s}$
β Tauri	$+28\ 31$	$0{,}0$	$+\ 3{,}7$ $+\ 3{,}7$	
α Geminorum	$+32^{0}\,14'$	$0{,}0^{h}$	$+\ 4{,}2^{s}$ $+\ 4{,}5$ $+\ 5{,}1$	$+\ 4{,}60^{s}$
α Urs. min.	$+88^{0}\,33'$	$0{,}0^{h}$	$+\ 92{,}7^{s}$ $+100{,}6$ $+\ 96{,}9$ $+\ 99{,}4$	$+97{,}4^{s}$
β Urs. min.	$+74^{0}\,44'$	$12{,}0^{h}$	$+\ 6{,}5^{s}$ $+\ 6{,}8$ $+\ 8{,}3$	$+\ 7{,}20^{s}$
10 Draconis	$+65^{0}\,26'$	$12{,}0^{h}$	$+\ 4{,}2^{s}$	$+\ 4{,}20^{s}$
η Urs. maj.	$+50^{0}\ 4'$	$12{,}0^{h}$	$+\ 1{,}4^{s}$ $+\ 1{,}5$	$+\ 1{,}45^{s}$

Hieraus ergeben sich nach Formel IV (S. 165) folgende Bedingungsgleichungen:

$0 = -\ 3^s,60 - 0^s,55\, n_1 + 1^s,13\, c + \beta' \cos\varphi$	1,4
$0 = -\ 3,50 - 0,32\, n_1 + 1,05\, c + \beta' \cos\varphi$	1,2
$0 = -\ 3,33 - 0,15\, n_1 + 1,01\, c + \beta' \cos\varphi$	1,2
$0 = -\ 2,91 - 0,00\, n_1 + 1,00\, c + \beta' \cos\varphi$	1,7
$0 = -\ 3,30 + 0,10\, n_1 + 1,00\, c + \beta' \cos\varphi$	1,2
$0 = -\ 3,77 + 0,46\, n_1 + 1,10\, c + \beta' \cos\varphi$	1,9
$0 = -\ 4,60 + 0,63\, n_1 + 1,18\, c + \beta' \cos\varphi$	1,2
$0 = -\ 97,40 + 39,51\, n_1 + 39,52\, c + \beta' \cos\varphi$	0,7
$0 = -\ 7,20 + 3,66\, n_1 + 3,80\, c - \beta' \cos\varphi$	1,2
$0 = -\ 4,20 + 2,19\, n_1 + 2,40\, c - \beta' \cos\varphi$	0,7
$0 = -\ 1,45 + 1,19\, n_1 + 1,56\, c - \beta' \cos\varphi$	1,0

Die neben den Gleichungen stehenden Factoren resultiren aus der Verbindung der auf S. 173 für die verschiedenen Declinationen abgeleiteten Gewichte p mit den Gewichten p', welche nach der Zahl der einzelnen Bestimmungen von C ermittelt sind. Als Einheit für p' ist dabei das Gewicht des arithmetischen Mittels zweier Einzel-Bestimmungen gewählt.

Die Auflösung der mitgetheilten Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate führt zu folgenden Werthen:

$n_1 = +\ 0^s,74 \pm 0^s,12 \quad c = +\ 1^s,68 \pm 0^s,12 \quad \beta' \cos\varphi = +\ 1^s,72 \pm 0^s,12.$

Eine Vergleichung der hiernach berechneten Werthe von C mit den beobachteten ergiebt:

	C beobachtet	C berechnet	$R-B$
$\delta = -\ 28^0\ 39'$	$+\ 3^s,60$	$+\ 3^s,20$	$-\ 0^s,40$
$-\ 17^0\ 51'$	$+\ 3,50$	$+\ 3,24$	$-\ 0,26$
$-\ 8^0\ 18'$	$+\ 3,33$	$+\ 3,30$	$-\ 0,03$
$-\ 0^0\ 21'$	$+\ 2,91$	$+\ 3,40$	$+\ 0,49$
$+\ 5^0\ 39'$	$+\ 3,30$	$+\ 3,47$	$+\ 0,17$
$+\ 24^0\ 49'$	$+\ 3,77$	$+\ 3,92$	$+\ 0,15$
$+\ 32^0\ 14'$	$+\ 4,60$	$+\ 4,16$	$-\ 0,44$
$+\ 88^0\ 33'$	$+\ 97,40$	$+\ 97,30$	$-\ 0,10$
$+\ 74^0\ 44'$	$+\ 7,20$	$+\ 7,38$	$+\ 0,18$
$+\ 65^0\ 26'$	$+\ 4,20$	$+\ 3,93$	$-\ 0,27$
$\delta = +\ 50^0\ \ 4'$	$+\ 1,45$	$+\ 1,78$	$+\ 0,33$

Als wahrscheinlicher Fehler einer Bestimmung von C mit dem Gewichte 1 ergiebt sich aus dem Eliminationsverfahren $0^s,30$, also für eine einzelne Bestimmung im Aequator $0^s,42$, während aus der bloſsen Vergleichung der einzelnen Werthe von C innerhalb jeder einzelnen Gruppe mit dem betreffenden Partial-Mittel, mit Ausschluſs der Beobachtungen von α und β Urs. min., folgt $0^s,46$ (allerdings merklich gröſser, als oben nach den bloſsen Beobachtungsfehlern angenommen wurde).

Aus der leidlichen Uebereinstimmung der beiden auf verschiedenen Wegen gefundenen wahrscheinlichen Fehler unter einander darf man aber schlieſsen, daſs das oben gefundene Werthsystem des n_1, c und $\beta' \cos\varphi$ den Beobachtungen genügt. Allerdings ist der Betrag der Biegung der Declinationsaxe ungewöhnlich groſs, aber die folgende Beobachtungsreihe bestätigt denselben.

Zweite Beobachtungsreihe für C, angestellt 1857 Febr. 20.

Stern	δ	t	C	Mittl. C	Stern	δ	t	C	Mittl. C
		h	s	s			h	s	s
λ Urs. min.	$+88^0\ 53'$	12,0	$+129,9$	$+129,9$	α Tauri	$16^0\ 13'$	6,0	$+2,8$	$+2,86$
								$+2,7$	
β Cephei	$+69\ 57$	12,0	$+5,0$	$+5,0$				$+2,8$	
								$+3,1$	
α Cephei	$+62\ 0$	12,0	$+2,6$	$+2,6$				$+2,9$	
v Leonis	$0\ 0$	0,0	$+4,7$				h	s	
			$+3,9$	$+4,27$	ζ Aquilae	$13^0\ 39'$	18,0	$+2,2$	
			$+4,4$					$+2,4$	
			$+4,1$					$+2,2$	$+2,36$
		h	s					$+2,6$	
β Leonis	$+15^0\ 23'$	0,0	$+4,9$					$+2,4$	
			$+4,5$						
			$+5,2$	$+4,80$					
			$+4,7$						
			$+4,7$						

Hieraus folgen die Bedingungsgleichungen:

$0 = -129^s,9 + 51,30\, n_1 + 51,30\, c - \beta' \cos\varphi$	0,2
$0 = -\ 5,00 + 2,74\, n_1 + 2,92\, c - \beta' \cos\varphi$	0,5
$0 = -\ 2,60 + 1,88\, n_1 + 2,14\, c - \beta' \cos\varphi$	0,5
$0 = -\ 4,27 + 0,00\, n_1 + 1,00\, c + \beta' \cos\varphi$	1,0
$0 = -\ 4,80 + 0,27\, n_1 + 1,04\, c + \beta' \cos\varphi$	1,1
$0 = -\ 2,86 + 0,29\, n_1 + 1,04\, c$	1,1
$0 = -\ 2,36 + 0,25\, n_1 + 1,03\, c$	1,1

Bei der Ableitung der rechts von den Gleichungen stehenden Factoren ist als Einheit von p' das Gewicht für das Mittel aus 4 einzelnen Bestimmungen im Aequator gewählt.

Die Auflösung der Gleichungen ergiebt:

$$n_1 = +0^s,28 \pm 0^s,17 \qquad c = +2^s,32 \pm 0^s,15 \qquad \beta' \cos\varphi = +2^s,23 \pm 0^s,17$$

und hieraus folgt die Vergleichung der beobachteten und berechneten Werthe von C:

	C beobachtet	C berechnet	$R-B$
$\delta = +88^0\,53'$	$+129^s,9$	$+131^s,3$	$+1^s,4$
$+69^0\,57'$	$+5,00$	$+5,29$	$+0,29$
$+62^0\,0'$	$+2,60$	$+3,26$	$+0,66$
$0^0\,0'$	$+4,27$	$+4,55$	$+0,28$
$+15^0\,23'$	$+4,80$	$+4,71$	$-0,09$
$+16^0\,13'$	$+2,86$	$+2,49$	$-0,37$
$\delta = +13^0\,39'$	$+2,36$	$+2,46$	$+0,10$

Bei dieser Reihe ergiebt sich für den wahrscheinlichen Fehler einer Bestimmung von C mit dem Gewichte 1 nach dem Eliminationsverfahren $0^s,22$, also für eine einzelne Bestimmung im Aequator $0^s,44$ und aus der Vergleichung der einzelnen Bestimmungen innerhalb jeder Gruppe mit dem zugehörigen Partial-Mittel $0^s,23$. Zur Erklärung des Unterschiedes der beiden wahrscheinlichen Fehler dient der Umstand, dafs in der zweiten Beobachtungsreihe für C nicht so viele wiederholte Umlegungen des Instrumentes, sondern vorzugsweise wiederholte Ablesungen in jeder der beiden Lagen desselben stattgefunden haben. Der Fehler einer Bestimmung von C scheint hiernach nicht nur von r_t und r_l, sondern auch von kleinen Veränderungen abhängig zu sein, welche das Umlegen des Instrumentes mit sich bringt. Hiernach wäre es eigentlich erforderlich, die obige Art der Gewichtsbestimmung in zweiter Näherung einer Revision zu unterziehen, doch scheint das vorliegende Material zu einer erschöpfenden Untersuchung dieser Art nicht ganz ausreichend.

Wenn man die aus der ersten und zweiten Beobachtungsreihe abgeleiteten Werthsysteme von n_1, c und $\beta' \cos\varphi$ den wahrscheinlichen Fehlern entsprechend combinirt, so erhält man

$$n_1 = +0^s,58 \pm 0^s,10 \qquad c = +1^s,92 \pm 0^s,10 \qquad \beta' \cos\varphi = +1^s,89 \pm 0^s,10$$
$$\beta' = +3^s,10 \pm 0^s,15.$$

Zur Controle dieser Werthe sollen noch drei andere Beobachtungen benutzt werden:

Stern	δ	t	$n_1 \operatorname{tg}\delta + c \sec\delta$ beobachtet	$n_1 \operatorname{tg}\delta + c \sec\delta$ berechnet	$R-B$	Anzahl der Beobachtungen	Datum
		h	s	s	s		
α Bootis	$+19^\circ 55'$	18,0	+2,14	+2,24	+0,10	5	1857 Jan. 10
83 Cancri	+18 18	6,0	+2,24	+2,20	−0,04	4	24
μ Geminorum	+16 33	6,0	+2,16	+2,17	+0,01	4	21
					+0,02		

Diese Vergleichung zeigt, daſs die zuletzt gefundenen Werthe von n_1 und c hinreichend sicher sind. Bei dem groſsen Betrage, den die Biegung der Declinationsaxe aufweist, ist es indessen rathsam, auch für β' eine unabhängige Controle aus den Beobachtungen abzuleiten.

Wenn man gute Näherungswerthe für n_1 und c hat, so genügt es, die Gröſse C einmal im Meridian aus Aequator-Sternen und ein anderes Mal in den Stundenwinkeln 6^h oder 18^h zu bestimmen, um direct $\beta' \cos\varphi$ zu finden. Es ist zunächst im Aequator und Meridian $C_0^0 = c + \beta' \cos\varphi$.

Ferner wird für die Stundenwinkel 6^h oder 18^h:

$$C_1 = c \sec\delta + n_1 \operatorname{tg}\delta.$$

Wenn man folglich mit Hülfe der Näherungswerthe für c und n_1 die Ausdrücke $c\ (\sec\delta - 1)$ und $n_1 \operatorname{tg}\delta$ berechnet, so läſst sich C_1 auf den Aequator reduciren und durch Abzug dieses reducirten Werthes von C_0^0 unmittelbar $\beta' \cos\varphi$ bestimmen.

Es ist aber für

$\delta = +12^0$	der Factor $(\sec\delta - 1) = 0{,}02$	und	$\operatorname{tg}\delta = 0{,}21$
$+16^0$	$0{,}04$		$0{,}29$
$+20^0$	$0{,}06$		$0{,}36.$

Man kann auch den im Meridian bestimmten Werth von C_0, wenn er nicht genau im Aequator beobachtet ist, ebenso auf letzteren reduciren.

Nach diesem Rechnungsverfahren sind die folgenden Beobachtungsreihen behandelt.

Dritte Beobachtungsreihe zur Bestimmung von n_1, c und β', angestellt 1857 Mai 15.

Stern	δ	t	C
		h	s
δ Aquilae	$+\ 2^0\ 50'$	0,0	$+4{,}20$
α Leonis	$+12\ 40$	0,0	$+4{,}79$
α Herculis	$+14\ 33$	18,0	$+2{,}22$
γ Geminorum	$+16\ 31$	6,0	$+3{,}12$

Bei Anwendung der oben gefundenen Werthe: $c = +1{,}^s92$ $n_1 = +0{,}^s58$ folgt

		$-c(\sec\delta - 1)$	$-n_1 \operatorname{tg}\delta$
		s	s
für	δ Aquilae	$0{,}00$	$-0{,}03$
	α Leonis	$-0{,}04$	$-0{,}13$
	α Herculis	$-0{,}06$	$-0{,}15$
	γ Geminor.	$-0{,}08$	$-0{,}17$

Die auf den Aequator reducirten Werthe von C sind daher

δ Aquilae	$+4{,}^s17$	α Herculis	$+2{,}^s01$
α Leonis	$+4{,}62$	γ Geminor.	$+2{,}87$
	$C_0^0 = +4{,}^s40$		$C_1^0 = +2{,}^s44$

hiernach $C_0^0 - C_1^0 = \beta' \cos\varphi = +1{,}^s96.$

Für solche Polsterne, bei welchen $\operatorname{cotg}\delta$ und $\cos\delta$ nahezu

gleichzusetzen sind, nimmt die Gleichung (IV) im Meridian und der O. C. folgende Gestalt an:

$$n_1 + c = C \operatorname{cotg} \delta - \beta' \cos \varphi \operatorname{cotg} \delta.$$

Wenn man daher C für solche Polsterne beobachtet und für die Biegung der Declinationsaxe corrigirt, so findet man $n_1 + c$ wegen des kleinen Factors cotg δ nahezu frei von etwaigen Unsicherheiten in β.

Nun ergaben die Beobachtungen im Mai 1857

für	α Urs. min.	$n_1 + c = + 2{,}^{s}96$
	δ Urs. min.	$+ 2{,}70$
		$n_1 + c = + 2{,}^{s}83$
somit, da oben gefunden		$c = + 2{,}44$
		$n_1 = + 0{,}^{s}39$

Wiederholt man mit diesen genauer zu dem Zeitpunkte der vorhergehenden Bestimmung von $\beta' \cos \varphi$ gehörenden Werthen von n_1 und c die obigen Rechnungen, so findet man nach zweimaliger Wiederholung das definitive Werthsystem:

$$c = + 2{,}^{s}49 \qquad \beta' \cos \varphi = + 1{,}^{s}93 \qquad n_1 = + 0{,}^{s}34,$$

welches, das etwas veränderliche c ausgenommen, genügend mit den aus der ersten und zweiten Beobachtungsreihe combinirten Werthen übereinstimmt.

Vierte Beobachtungsreihe zur Bestimmung von c und β', angestellt 1857 Juli 29.

Es sei vorausgeschickt, dafs der Collimationsfehler am 2. Juli 1857, also vor Beginn der vierten Beobachtungsreihe, verändert wurde, und dafs die letztere Beobachtungsreihe in der Stellung S. II des Micrometers ausgeführt ist, während die früheren Beobachtungsreihen zur Lage S. I gehören. Daher bedarf der aus der vierten Reihe abgeleitete Collimationsfehler einer Reduction auf Lage S. I im Betrage von $+ 1{,}^{s}32$.

Stern	δ	t	C	Anzahl der Beobachtungen
		h	s	
α Aquarii	— 0° 58′	0,0	+ 0,09	5
ι Piscium	+ 4 50	0,0	— 0,94	2
363 Bootis	+ 19 0	6,0	— 1,72	5
97 i Tauri	+ 18 36	18,0	— 2,12	5

Aus der Annahme $c = -2^s,0$ $n_1 = +0^s,4$ findet man die Reductionen:

	$-c(\sec\delta - 1)$	$-n_1 \operatorname{tg}\delta$		$-c(\sec\delta - 1)$	$-n_1 \operatorname{tg}\delta$
	s	s		s	s
α Aquarii	0,00	+ 0,01	363 Bootis	— 0,12	— 0,14
ι Piscium	0,00	— 0,03	97 i Tauri	— 0,10	— 0,13

Hiermit ergiebt sich folgendes:

α Aquarii	+ 0,10 (5 Beob.)	363 Bootis	— 1,98 (5 Beob.)
ι Piscium	— 0,97 (2 Beob.)	97 i Tauri	— 2,35 (5 Beob.)
	$C_0^0 = -0^s,20$		$C_1^0 = -2^s,16$

Daraus folgt

$c = -2^s,16$ oder auf S. I reducirt $= -0^s,84$

$\beta' \cos\varphi = +1^s,96.$

Eine Zusammenstellung der für die Biegung der Declinationsaxe gefundenen Werthe ergiebt somit folgendes:

	$\beta' \cos\varphi$	
	s	s
Reihe I	+ 1,72	± 0,12
„ II	+ 2,23	± 0,17
„ III	+ 1,93	
„ IV	+ 1,96	

Man kann als Mittelwerth $\beta' \cos\varphi = +1^s,9$ annehmen. Offenbar ist also die Bestimmung von $\beta' \cos\varphi$ für die genaue Kenntniſs der Aufstellung des Instrumentes nicht unwesentlich. Insbesondere würde man auch bei der Bestimmung von Positionswinkeln in der Nähe des Poles beträchtliche Fehler begehen, wenn man den Effect der Biegung mit dem Collimationsfehler vermischen wollte.

Aus den obigen Zahlen folgt endlich: $\beta' = +3^s,12$.

Der beträchtliche Werth für die Biegung der Declinationsaxe am Berliner Aequatorial verdient Beachtung, weil er der erste sicher constatirte ist. Bessel fand die Biegung der Declinationsaxe am Königsberger Heliometer beinahe verschwindend, und bei dem Instrumente in Dorpat wurde eine hierauf bezügliche Untersuchung nicht angestellt.

Es fragt sich nun, wie genau die Formel ist, aus welcher der grofse Werth von $\beta' \cos\varphi$ abgeleitet ist. Darüber geben Beobachtungen von C, welche in verschiedenen Stundenwinkeln angestellt sind, Aufschluſs. Die bezüglichen Beobachtungen sind 1857 Febr. 7 und 8 ausgeführt worden:

Stern	δ	t	C	Anzahl der Beobachtungen
7 Herculis	+ 17° 26′	18h 22m	+ 2,61 s	2
α Serpentis	+ 6 53	19 29	+ 2,62	3
β Librae	− 8 50	20 24	+ 3,59	3
1 α Librae	− 15 25	21 18	+ 3,97	3
τ Virginis	+ 2 15	22 31	+ 4,24	3
ζ Virginis	+ 0 8	23 22	+ 4,18	2
ζ Virginis	+ 0 8	0 0	+ 4,41	3

Zur Zeit dieser Beobachtungen war $c = +1^s,9$, $n_1 = +0^s,5$; daher folgen zunächst die Reductionen auf den Aequator:

Stern	$-c(\sec\delta - 1)$	$-n_1 \operatorname{tg}\delta$	C^0 (reducirt)
7 Herculis	− 0,08 s	− 0,16 s	+ 2,37 s
α Serpentis	− 0,01	− 0,06	+ 2,55
β Librae	− 0,02	+ 0,08	+ 3,65
1 α Librae	− 0,08	+ 0,14	+ 4,03
τ Virginis	− 0,00	− 0,01	+ 4,23
ζ Virginis	− 0,00	− 0,00	+ 4,18
ζ Virginis	− 0,00	− 0,00	+ 4,41

Nun ist dieses $C^0 = c + \beta' \cos\varphi \cos t$. Wenn man daher davon den Betrag der Biegung abzieht, so mufs man für alle Stundenwinkel nahe denselben Werth c erhalten, sobald die Formel zur Berechnung von $\beta' \cos\varphi$ hinreichend genau ist.

Benutzt man den oben gefundenen Werth $\beta' \cos\varphi = +1^s,90$, so findet man

für $t = 18^h\,22^m$	$-\beta' \cos\varphi \cos t = -0^s,18$	$c = +2^s,19$
19 29	$-0,72$	$+1,83$
20 24	$-1,12$	$+2,53$
21 18	$-1,44$	$+2,59$
22 31	$-1,75$	$+2,48$
23 22	$-1,87$	$+2,31$
0 0	$-1,90$	$+2,51$
		Mittel $+2,35$

Der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Bestimmung von C folgt hieraus $= 0^s,31$, während derselbe früher aus den Beobachtungsreihen in der Nähe der Meridian-Ebene zu etwa $0^s,4$ sich ergeben hat. Hiernach scheint das angenommene Gesetz der Biegung, obwohl die obige Reihe nichts völlig Entscheidendes darüber aussagt, doch im allgemeinen den Beobachtungen zu entsprechen.

Nachdem die Biegung der Declinationsaxe näher behandelt ist, soll eine gröfsere Reihe einzelner Beobachtungen der Werthe c und n_1 zusammengestellt werden, um über die Constanz dieser Fehler ein Urtheil zu gewinnen. Die folgende Tafel enthält zunächst c, welches aus der Beobachtung von C im Aequator und Meridian mit Hülfe der Formel $c = C - \beta' \cos\varphi$ hervorgeht und ferner $c + n_1$, welches aus der Beobachtung von C nahe am Pol und im Meridian gefunden wird.

Tafel der Fehler c und n_1.

Datum der Beobachtungen	c	$c + n_1$	n_1
1856 April 18	$+0{,}^{s}60$	$+2{,}^{s}28$	$+1{,}^{s}68$
1857 Jan. 6	$+1{,}67$	$+2{,}28$	$+0{,}61$
„ 8	$+1{,}00$	$+2{,}40$	$+1{,}40$
„ 21	$+1{,}23$	$+2{,}31$	$+1{,}08$
„ 24	$+2{,}27$	$+2{,}47$	$+0{,}20$
„ 31	$+2{,}64$	$+2{,}38$	$-0{,}26$
Febr. 7	$+2{,}18$	$+2{,}68$	$+0{,}50$
„ 20	$+2{,}37$	$+2{,}58$	$+0{,}21$
Mai 15	$+2{,}49$	$+2{,}83$	$+0{,}34$
Juni 16	$+1{,}80$		

Man ersieht aus dieser Tafel, dafs die aus Polsternen bestimmte Gröfse $c + n_1$ lange Zeit hindurch sehr constant geblieben ist, denn die mittlere Abweichung einer einzelnen Bestimmung vom arithmetischen Mittel beträgt nicht mehr als $0{,}^{s}15$. Die Unterschiede in den Werthen von c und n_1 sind offenbar den stärkeren Beobachtungsfehlern bei der Bestimmung von c im Aequator, wo die Ablesungsfehler des Stundenkreises stärker influiren, zuzuschreiben, da es sehr unwahrscheinlich ist, dafs die Aenderungen von c und n_1 sich gegenseitig so aufheben, dafs $c + n_1$ constant bleibt.

Im Mittel ist $c = +1{,}^{s}83 \quad n_1 = +0{,}^{s}64$
und eine Bestimmung von 1858 Febr. 11 hat schliefslich noch $n_1 = +0{,}^{s}89$ ergeben.

Man kann daher die Fehler c und n_1 des Instrumentes als ziemlich constant ansehen. Insbesondere scheint auch die Jahreszeit keinen erheblichen Einfluſs zu äufsern.

Schliefslich verdient es noch Beachtung, dafs der grofse Betrag, welcher für die Biegung der Declinationsaxe gefunden ist, auch auf das Mittel der in beiden Lagen des Instrumentes angestellten Ablesungen des Stundenkreises von einigem Einflusse sein kann. Denn es ist

$$\alpha = U + \Delta U - (T+\gamma) + c\sec\delta + n_1 \operatorname{tg}\delta + \beta' \cos\varphi \cos(T+\gamma) \ldots . \text{ K.V.}$$

$$\alpha = U' + \Delta U - (T'+\gamma) - c\sec\delta - n_1 \operatorname{tg}\delta - \beta' \cos\varphi \cos(T'+\gamma) \ldots . \text{ K.F.}$$

$$\text{also } \alpha = \frac{U+U'}{2} + \Delta U - \left(\frac{T+T'}{2} + \gamma\right) + \beta' \cos\varphi \sin\left(\frac{T'-T}{2}\right) \sin\left(\frac{T'+T}{2} + \gamma\right) \ldots$$

Hieraus folgt, dafs in den Stundenwinkeln 6^h und 18^h an das Mittel der Kreisablesungen eine Correction für die Biegung der Declinationsaxe anzubringen, dafs dieselbe aber in der Nähe des Meridians zu vernachlässigen ist. Setzt man der Kürze halber

$$\frac{U+U'}{2} + \Delta U - \frac{T+T'}{2} - \gamma = a$$

$$\beta' \cos\varphi \sin\left(\frac{T'+T}{2} + \gamma\right) \sin\left(\frac{T'-T}{2}\right) = \Delta a_{\beta'},$$

so erhält man für die Stundenwinkel 6^h und 18^h mit der Annahme $\beta' \cos\varphi = +1^s,90$ folgendes Täfelchen für die an a anzubringende Correction $\Delta a_{\beta'}$:

	$\frac{T'-T}{2} = +4^m$	$\frac{T'-T}{2} = +8^m$	$\frac{T'-T}{2} = +12^m$	
$\Delta a_{\beta'}$	$\pm 0^s,03$	$\pm 0^s,07$	$\pm 0^s,10$	6^h und 18^h

3) Die Coordinaten des Instrumental-Poles ξ und η.

Es wird vorausgeschickt, dafs unser Aequatorial zur Zeit, als die vorliegenden Aufstellungsbeobachtungen gemacht wurden, noch auf dem bekannten Münchener Holz-Stativ angebracht war, welches von der Temperatur, wie die Variationen von ξ und η zeigen werden, stark beeinflufst wurde.

Die Beobachtungen der beiden Coordinaten sind ziemlich gleichzeitig angestellt, aber so, dafs ξ wegen seiner gröfseren Veränderlichkeit viel häufiger als η in einer Nacht beobachtet wurde.

a) Beobachtungen der Coordinate ξ.

Es sollen zunächst drei Beobachtungsreihen mitgetheilt werden, welche für $\xi_1 = \xi \pm \beta \sin(\varphi \mp \delta)$ $\left\{\begin{matrix}\text{O. C.}\\ \text{U. C.}\end{matrix}\right.$ im Meridian angestellt sind.

Datum der Beobachtung	Stern	δ	t	ξ_1	
1857 Januar 6 u. 7			h		
	β Urs. min.	+ 74° 74′	12,0	+ 99″,3	} Nord
	α Urs. min.	+ 88 33	0,0	+ 101,4	
	α Geminorum	+ 32 12	0,0	+ 126,4	} Süd
	δ Geminorum	+ 22 15	0,0	+ 129,5	
	α Can. min.	+ 5 35	0,0	+ 123,2	
	δ Orionis	− 0 24	0,0	+ 116,3	
	β Orionis	− 8 22	0,0	+ 127,1	
	α Leporis	− 17 56	0,0	+ 117,0	
	ε Can. maj.	− 28 47	0,0	+ 131,9	
1857 Januar 8					
	η Urs. maj.	+ 50 1	12,0	+ 96,8	} Nord
	β Urs. min.	+ 74 44	12,0	+ 103,7	
	α Urs. min.	+ 88 33	0,0	+ 91,8	
	α Geminorum	+ 32 12	0,0	+ 132,3	} Süd
	δ Geminorum	+ 22 15	0,0	+ 130,2	
	α Can. min.	+ 5 35	0,0	+ 130,4	
	δ Orionis	− 0 24	0,0	+ 121,5	
	β Orionis	− 8 22	0,0	+ 124,8	
	α Leporis	− 17 56	0,0	+ 117,7	
	ε Can. maj.	− 28 47	0,0	+ 131,8	
1857 Januar 21					
	η Urs. maj.	+ 50 1	12,0	+ 56,9	} Nord
	10 Draconis	+ 65 25	12,0	+ 55,1	
	β Urs. min.	+ 74 44	12,0	+ 56,4	
	α Urs. min.	+ 88 33	0,0	+ 51,0	
	α Geminorum	+ 32 12	0,0	+ 85,0	} Süd
	α Can. min.	+ 5 35	0,0	+ 81,7	
	δ Orionis	− 0 24	0,0	+ 69,6	
	γ Can. maj.	− 15 25	0,0	+ 80,9	
	ε Can. maj.	− 28 47	0,0	+ 83,5	

Beim ersten Anblick dieser Beobachtungsreihen scheint es, als ob ξ' von Nord nach Süd wächst, wodurch ein positiver Werth für die Biegung des Fernrohres angezeigt würde. Aber bei näherer Betrachtung erkennt man, dafs die im südlichen Theile des Meridians gefundenen Werthe von ξ' unter einander nicht demselben Gesetze folgen.

Denn es ist

$$\xi'_{\delta - 28^\circ\,47'} - \xi'_{\delta + 32^\circ\,12'}$$

aus Reihe	I	$= +5''{,}5$	
„ „	II	$-0{,}5$	
„ „	III	$-1{,}5$	
Mittel		$+1''{,}2 = \beta\,(\sin 81^\circ\,17' - \sin 20^\circ\,18') = 0{,}64\,\beta.$	

Wenn man dagegen die Mittel sämmtlicher Bestimmungen im Norden und derjenigen im Süden vergleicht, so findet man

	Nord	Süd	Süd − Nord
Januar 6 und 7	$\xi' = +100''{,}3$	$\xi' = +124''{,}5$	$+24''{,}2$
„ 8	$+97{,}4$	$+126{,}9$	$+29{,}5$
„ 21	$+54{,}8$	$+80{,}1$	$+25{,}3$
		Mittel	$+26''{,}3.$

Da nun ξ' eine Function von ξ und β ist, so bleibt zur Erklärung dieses Widerspruches nur die Annahme übrig, dafs sich ξ während der Beobachtungen geändert hat. Die drei Beobachtungsreihen für ξ' sind gleichartig, insofern als bei ihnen nahezu dieselben Sterne in derselben Reihenfolge benutzt wurden. Aber da die erste Reihe sich aus Beobachtungen an zwei verschiedenen Tagen zusammensetzt, welche bei veränderlicher Aufstellung des Instrumentes weniger homogen sind, so sollen im Folgenden zunächst nur die zweite und dritte Reihe benutzt werden, um die Werthe von ξ' nach der Beobachtungszeit zu ordnen.

Januar 8.

δ	Sternzeit	ξ'
+ 88° 33′	1h 7m	+ 91″,8
+ 129 59	1 41	96,8
+ 105 16	2 50	103,7
— 8 22	5 7	124,8
— 0 24	5 24	121,5
— 17 56	5 26	117,7
— 28 47	6 53	131,8
+ 22 15	7 11	130,2
+ 32 12	7 25	132,3
+ 5 35	7 31	130,4

Januar 21.

δ	Sternzeit	ξ'
+ 88° 33′	1h 7m	+ 51″,0
+ 129 59	1 41	56,9
+ 114 35	1 47	55,1
+ 105 16	2 50	56,4
— 0 24	5 24	69,6
— 28 47	6 53	83,5
— 15 25	6 57	80,9
+ 32 12	7 25	85,0
+ 5 35	7 31	81,7

Aus dieser Zusammenstellung ergiebt sich, dafs die Abhängigkeit der Werthe ξ' von der Beobachtungszeit eine viel gesetzmäfsigere ist, als die früher nach der Zenithdistanz vermuthete. Deshalb sollen zunächst sämmtliche Werthe nach Ableitung einer stündlichen Variation aus dem ersten und letzten ξ' näherungsweise auf eine mittlere Beobachtungszeit reducirt werden:

Januar 8.

Stündl. Variation = + 6″,03.

δ	ξ' reducirt auf 5h 3m
+ 88° 33′	+ 115″
+ 129 59	+ 116
+ 105 16	+ 117
— 8 22	+ 124
— 0 24	+ 119
— 17 56	+ 115
— 28 47	+ 121
+ 22 15	+ 117
+ 32 12	+ 118
+ 5 35	+ 116

5h 3 m ξ' = + 118″

Mittlere Abweichung = 2″

Januar 21.

Stündl. Variation = + 4″,80.

δ	ξ' reducirt auf 4h 37m
+ 88° 33′	+ 68″
+ 129 59	+ 71
+ 114 35	+ 69
+ 105 16	+ 65
— 0 24	+ 66
— 28 47	+ 72
— 15 25	+ 70
+ 32 12	+ 72
+ 5 35	+ 68

4h 37m ξ' = + 70″

Mittlere Abweichung = 2″

Die Uebereinstimmung der reducirten Werthe von ξ' ist so vollständig, dafs sich zwei Folgerungen daraus ziehen lassen:

Erstens: die Biegung des Fernrohres ist sehr klein.

Zweitens: die Coordinate ξ steht in gesetzmäfsiger Abhängigkeit von der Beobachtungszeit.

Zur Bekräftigung des ersten Schlusses soll später auch bei der Bestimmung von η eine Reihe mitgetheilt werden, welche das Nichtvorhandensein einer merklichen Biegung des Rohres beweist. Zunächst soll jedoch die Abhängigkeit der Coordinate ξ von der Beobachtungszeit noch schärfer untersucht werden.

Dazu dient die Mittheilung von Beobachtungsreihen, welche im Gegensatze zu den früheren so angestellt sind, dafs zuerst die südlichen und dann die nördlichen Sterne beobachtet wurden. Wenn nämlich in diesem Falle die Differenz der Werthe von ξ' im Sinne (Süd—Nord), welche früher (vergl. die Seite 188) zu $+26''3$ gefunden ist, das entgegengesetzte Zeichen annimmt, so folgt daraus mit Evidenz, dafs jene Differenz nicht von der Lage der Sterne zum Scheitelpunkt des Beobachtungsortes, sondern lediglich von der Veränderlichkeit der Stellung des Instrumentes abhängig ist.

Es liegen hierfür drei Beobachtungsreihen vor, von denen allerdings nur die letzte an Vollständigkeit mit den vorangehend mitgetheilten Reihen zu vergleichen ist; indessen werden die Ergebnisse für den in Rede stehenden Nachweis genügen.

Datum der Beobachtung	Stern	δ	Sternzeit	ξ'	ξ' im Mittel
1857 Januar 31	δ Orionis	$-\ 0^{0}\ 24'$	$5^{h}\ 24^{m}$	$+\ 91''{,}0$	$+\ 91''{,}0$
	δ Urs. min.	$+86\ 36$	6 18	$+103{,}6$	$+103{,}2$
	51 Cephei	$+87\ 15$	6 31	$+102{,}8$	
				Süd-Nord $=-$	$12''{,}2$
Februar 7	δ Orionis	$-\ 0\ 24$	5 24	$+\ 65{,}8$	$+\ 65{,}8$
	δ Urs. min.	$+86\ 36$	6 18	$+\ 75{,}6$	$+\ 75{,}9$
	51 Cephei	$+87\ 15$	6 31	$+\ 76{,}1$	
				Süd-Nord $=-$	$10''{,}1$
Februar 9	α Leonis	$+12\ 39$	10 0	$+\ 97{,}4$	$+\ 96{,}0$
	γ Leonis	$+20\ 33$	10 12	$+\ 98{,}4$	
	ϱ Leonis	$+10\ 2$	10 25	$+\ 88{,}2$	
	ι Leonis	$+11\ 18$	10 42	$+\ 99{,}2$	
	α Cassiopejae	$+55\ 45$	12 24	$+\ 99{,}0$	$+102{,}1$
	" "	" "	12 30	$+\ 98{,}0$	
	" "	" "	12 36	$+101{,}9$	
	α Urs. min.	$+88\ 33$	13 0	$+100{,}7$	
	" "	" "	13 7	$+106{,}0$	
	" "	" "	13 15	$+107{,}0$	
				Süd-Nord $=-$	$6''{,}1$

Hiernach ist die Veränderung der Coordinate ξ in Function der Beobachtungszeit ganz zweifellos erwiesen, und naturgemäfs kann diese Veränderung nur durch den Einfluſs der Temperatur auf die Aufstellung des Instrumentes bewirkt werden. Die Abhängigkeit der Werthe ξ von der Temperatur ist dabei eine solche, daſs ξ mit abnehmender Temperatur wächst, oder daſs der Pol des Instrumentes sich dem Scheitelpunkte des Beobachtungsortes nähert, wenn die Temperatur fällt.

Die folgende Tafel, in welcher die Coordinatenwerthe ξ, die in dem Zeitraum 1856 April 18 bis 1858 Februar 11 beobachtet wurden, nach der Temperatur zusammengefaſst sind, läſst die Abhängigkeit der Aufstellung des Instrumentes von der Temperatur deutlich erkennen:

Ablesung des Thermometers	ξ beobachtet	Datum der Beobachtung	ξ im Mittel
— 7,5° R.	+ 128″	1857 Januar 7	+ 129″
	+ 131	Januar 8	
— 6,5	+ 120	Januar 7	+ 120
	+ 121	Januar 8	
— 3,0	+ 99	Februar 9	+ 98
	+ 100	Januar 6	
	+ 95	Januar 8	
— 2,5	+ 103	Januar 31	+ 103
— 2,0	+ 91	Januar 31	+ 97
	+ 91	1857 Februar 7	
	+ 100	1858 Februar 7	
	+ 108	1858 Februar 11	
— 1,5	+ 83	1857 Januar 21	+ 82
	+ 76	Februar 7	
	+ 75	1856 Decbr. 23	
	+ 91	1858 Februar 11	
— 1,0	+ 70	1857 Januar 21	+ 71
	+ 66	Februar 7	
	+ 74	1856 Decbr. 30	
	+ 73	1857 Januar 24	
0,0	+ 56	Januar 21	+ 56
	+ 51	Januar 21	
	+ 62	Januar 24	
+ 1,7°	+ 0,8	+ 52	1857 Februar 17	+ 48
	+ 1,8	+ 49	Februar 20	
	+ 2,4	+ 41	Februar 20	
+ 6,3	+ 4,0	— 11	1856 October 30	— 9
	+ 6,0	— 11	Decbr. 10	
	+ 7,0	+ 3	Decbr. 9	
	+ 8,0	— 18	April 18	
+ 8,2	+ 8,0	— 77	1857 Mai 15	— 81
	+ 8,3	— 85	Mai 15	
+ 12,9	+ 11,5	— 121	1857 Mai 15	— 132
	+ 12,4	— 141	Juli 29	
	+ 12,8	— 146	Juli 29	
	+ 15,0	— 118	Mai 15	
+ 19,7	+ 16,7	— 159	1857 August 13	— 205
	+ 19,0	— 206	Juni 25	
	+ 20,0	— 236	Juli 2	
	+ 23,0	— 217	August 13	

Die Tafel umfafst nahezu zwei Jahre, und man kann daraus schliefsen, dafs die Amplitude der gesammten Veränderung etwa 5 Bogenminuten für 27 Grade der Réaumur'schen Temperaturscale betragen hat. Für eine mittlere Temperatur von $+ 6{,}^{\circ}0$ ist der Werth der Coordinate ξ verschwindend klein. Daher hat der Pol des Instrumentes eine periodische jährliche Oscillation, welche mit ziemlicher Regelmäfsigkeit um den wahren Himmelspol stattfindet.

Die Bestimmung der Coordinate ξ kann aber auch in den Stundenwinkeln 6^h und 18^h mit Hülfe des Stundenkreises ausgeführt werden. Die so gefundenen Werthe von ξ lassen sich dann mit den im Meridian mit Hülfe des Declinationskreises abgeleiteten vergleichen, und diese Vergleichung führt zu einer unabhängigen Controle der Durchbiegung des Fernrohres, welche sich aus den Beobachtungen im Meridian als verschwindend klein ergeben hatte.

Im Folgenden soll eine Zusammenstellung der nach den beiden verschiedenen Methoden gefundenen Werthe von ξ, sowie deren Vergleichung mitgetheilt werden:

Am Stundenkreise.			Am Declinationskreise.		Polsterne.		
Datum	Sternzeit der Beobachtung Θ	ξ_α	Sternzeit der Beobachtung Θ'	ξ_δ	$\xi_\delta - \xi_\alpha$	$\Theta' - \Theta$	Reihe I.
1857 Januar 6	$1^h\ 6^m$	$+ 84''{,}0$	$1^h 44^m$	$+ 101''{,}4$	$+ 17''{,}4$	$+ 0^h 38^m$	
8	0 24	+ 74,2	1 7	+ 91,8	+ 17,6	+ 0 43	
21	1 0	+ 33,2	1 22	+ 51,0	+ 17,8	+ 0 22	
24	1 0	+ 33,1	1 23	+ 62,2	+ 29,1	+ 0 23	
31	7 15	+ 87,5	6 35	+ 102,2	+ 14,7	− 0 40	
1857 Februar 7	7 5	+ 59,0	6 33	+ 75,8	+ 16,8	− 0 32	
					+ 18,9	$+ 0^h\ 9^m$	

Die gefundene Differenz $\xi_\delta - \xi_\alpha$ läfst sich nicht aus einer Veränderung von ξ innerhalb der Zeit $\Theta' - \Theta$ erklären, da die stündliche Variation von ξ um dieselbe Zeit oben zu ungefähr $5''$ gefunden ist, und da die beiden letzten Zeilen der Differenzenreihe

$\xi_\delta - \xi_\alpha$ dasselbe Zeichen wie die voraufgehenden haben. Die Realität dieser Differenz wird jedoch durch eine unzweideutige Beobachtung, welche 1858 Februar 11 angestellt ist, zweifellos, denn an jenem Tage wurde mit Hülfe des Niveaus die Veränderung von ξ zwischen den Beobachtungen von ξ_α und ξ_δ bestimmt und somit die Reduction der beiden Werthe auf dieselbe Zeit gefunden. Es ergaben sich die reducirten Werthe:

ξ_α	ξ_δ	$\xi_\delta - \xi_\alpha$	
$+ 64''8$	$+ 92''0$	$+ 22''7$	Reihe II.
$+ 65,8$	$+ 89,8$		
$+ 65,3$	$+ 85,2$		
	$+ 84,8$		
	$+ 88,0$		

Daher bleibt nichts weiter übrig, als anzunehmen, dass in runder Zahl $\beta \cos \varphi = 20''$ ist, obwohl aus den Beobachtungen im Meridian auf eine verschwindend kleine Biegung des Fernrohres geschlossen werden konnte.

Dieser Widerspruch kann sich so lösen, dafs in Folge der Art der Verbindung des Fernrohres mit der Declinations-Axe, sowie in Folge der Besonderheiten der Contre-Balancirung des Rohres die Differenz zwischen der Durchbiegung des Objectiv-Endes und derjenigen des Ocular-Endes des Fernrohres innerhalb einer zur Declinations-Axe normalen Ebene eine viel kleinere ist als innerhalb einer durch die Declinations-Axe und die Fernrohr-Axe gelegten Ebene, innerhalb welcher die obige Componente $\beta \cos \varphi$ in Frage kommt.

Zur näheren Untersuchung gehe ich auf Beobachtungen in den Stundenwinkeln 6^h und 18^h zurück, wähle jedoch zur Bestimmung der Coordinate ξ nicht, wie bei vorstehenden Beobachtungen, Sterne, welche dem Pol sehr nahe sind, bei denen aber nach der Einrichtung des Instrumentes nur in einer Lage des Instrumentes beobachtet werden kann, so dass die Bestimmung des ξ von den Werthen des c und n abhängig ist, sondern passende Sterne solcher Declination, dafs sie in beiden Lagen des Instrumentes beobachtet

werden können, um bei Bestimmung des Betrages $\beta \cos \varphi$ von der Kenntnifs der Werthe n_1 und c unabhängig zu werden. Die zu benutzenden Declinationen liegen zwischen $+ 12°$ und $+ 20°$, und es ist

$$\xi = \pm \left\{ \alpha - (U + \Delta U - T - \gamma) \right\} \operatorname{cotg} \delta + \beta \cos \varphi \operatorname{cosec} \delta$$
$$\pm \frac{k \operatorname{tg} M}{\sin (\psi + \delta)} \operatorname{cosec} \delta - \eta \operatorname{tg} (T + \gamma - 6^h)$$

das obere Zeichen für 6^h, das untere für 18^h Stundenwinkel, wo die U und die T der Abkürzung wegen für die Mittel aus den zusammengehörigen Beobachtungen in den beiden Lagen des Instrumentes K. F. und K. V. gesetzt sind. Wenn daher ein Stern mit der Rectascension α und der Declination δ im Stundenwinkel 6^h und ein anderer Stern mit den Coordinaten α_1, δ_1 im Stundenwinkel 18^h beobachtet wird, so erhält man, wenn die beobachteten Ablesungen für den ersten Fall mit U, T u. s. w., für den zweiten Fall mit U_1, T_1 bezeichnet werden, folgende Gleichungen:

$$\beta \cos \varphi \sec \delta = U + \Delta U - T - \gamma - \alpha + \xi \operatorname{tg} \delta - \frac{k \operatorname{tg} M}{\sin (\psi + \delta)} \sec \delta$$
$$+ \eta \operatorname{tg} (T + \gamma - 6^h) \operatorname{tg} \delta$$

$$- \beta \cos \varphi \sec \delta_1 = U_1 + \Delta U_1 - T_1 - \gamma - \alpha_1 - \xi \operatorname{tg} \delta_1 - \frac{k \operatorname{tg} M_1}{\sin (\psi_1 + \delta_1)} \sec \delta_1$$
$$- \eta \operatorname{tg} (T_1 + \gamma - 6^h) \operatorname{tg} \delta_1$$

und wenn man mit Hinzunahme der oben entwickelten kleinen Correction $\Delta a_{\beta'}$

$$U + \Delta U - T - \frac{k \operatorname{tg} M}{\sin (\psi + \delta)} \sec \delta + \eta \operatorname{tg} (T + \gamma - 6^h) \operatorname{tg} \delta + \Delta a_{\beta'} = a^0$$

$$U_1 + \Delta U_1 - T_1 - \frac{k \operatorname{tg} M_1}{\sin (\psi_1 + \delta_1)} \sec \delta_1 - \eta \operatorname{tg} (T_1 + \gamma - 6^h) \operatorname{tg} \delta_1 + \Delta a_{\beta'} = a^0{}_1$$

setzt, so ergiebt sich

$$\beta \cos \varphi \sec \delta = a^0 - \alpha + \xi \operatorname{tg} \delta - \gamma$$
$$\beta \cos \varphi \sec \delta_1 = \alpha_1 - a_1{}^0 + \xi \operatorname{tg} \delta_1 + \gamma$$

$$\beta \cos \varphi \frac{(\sec \delta + \sec \delta_1)}{2} = \frac{(a^0 - \alpha) + (\alpha_1 - a_1{}^0)}{2} + \xi \frac{(\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \delta_1)}{2},$$

wonach $\beta \cos \varphi$ zu berechnen ist. Zur Controle benutzt man die Gleichung

$$\gamma = \frac{(a^0 - \alpha) - (\alpha_1 - a_1{}^0)}{2} + \xi \frac{(\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \delta_1)}{2} - \beta \frac{(\sec \delta - \sec \delta_1)}{2},$$

indem man den so gefundenen Werth von γ mit dem direct durch Meridianbeobachtungen bestimmten vergleicht.

Nach den Vorschriften dieser Formeln sind drei Beobachtungsreihen zur Bestimmung von $\beta \cos \varphi$ angestellt worden. Dabei ist auf eine möglichst genaue anderweitige Kenntnifs der Coordinate ξ gehalten worden, da der Factor von ξ nämlich $\frac{\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \delta_1}{2}$ zwischen den oben festgesetzten Grenzen der Declination den Werth 0,35 erreichen kann.

1857 Februar 20. Reihe III zur Bestimmung von $\beta \cos \varphi$.

Sternzeit	$8^h\ 22^m$	$\xi = +44''$	
	9 24	42	
	9 35	38	
	11 37	46	
	12 0	52	

α Tauri ($t = 6^h$) $a^0 =$	$4^h\ 27^m\ 40^s,4$	ζ Aquilae ($t = 18^h$) $a_1{}^0 =$	$18^h\ 58^m\ 47^s,0$
$\Theta = 10^h,4$	40,4	$\Theta = 12^h,9$	46,6
	40,9		45,9
	41,0		46,2
	41,0		45,9
	$4^h\ 27^m\ 40^s,74$		$18^h\ 58^m\ 46^s,32$

$a^0 = 4^h\ 27^m\ 40^s,74$ $\quad$ $a_1{}^0 = 18^h\ 58^m\ 46^s,32$

$\alpha = 4\ 27\ 43,61$ $\quad$ $\alpha_1 = 18\ 58\ 49,50$

$\delta = +16°\ 13'$ $\quad$ $\delta_1 = +13°\ 39'$

für $\Theta = 10,4$ ist	$\xi = +42''$	$= +2^s,8$
12,9	$\xi_1 = +54$	$+3,6$

$$\frac{a^0 - \alpha}{2} = -1^s,43$$

$$\frac{\alpha_1 - a_1^0}{2} = +1^s,59$$

$$\frac{(a^0 - \alpha) + (\alpha_1 - a_1^0)}{2} = +0^s,16$$

$$+\frac{\xi \operatorname{tg} \delta + \xi_1 \operatorname{tg} \delta_1}{2} = +0^s,84$$

$$\beta \cos \varphi = +1^s,00 = +15''$$

In 6^h und 18^h beobachtet $\gamma = -3^s,0$. Im Meridian beobachtet $\gamma = -3^s,3$

1857 Mai 15. Reihe IV zur Bestimmung von $\beta \cos \varphi$.

Sternzeit	$10^h\ 0^m$	$\xi = -118''$
	$13\ 0$	-121
	$18\ 18$	$-\ 85$
	$19\ 18$	$-\ 77$

γ Geminor. ($t = 6^h$)		α Herculis ($t = 18^h$)	
$a^0 = 6^h\ 29^m\ 28^s,2$		$a_1^0 = 17^h\ 8^m\ 4^s,7$	
$\Theta = 12^h,5$	28,2	$\Theta_1 = 11^h1$	4,6
	28,1		4,8
	28,2		4,6
	27,9		4,5
			4,4
$a^0 = 6^h\ 29^m\ 28^s,12$		$a_1^0 = 17^h\ 8^m\ 4^s,60$	
$\alpha = 6\ 29\ 27,14$		$\alpha_1 = 17\ 8\ 9,84$	
$\delta = +16°\ 31'$		$\delta_1 = +14°\ 33'$	

für $\Theta = 12^h,5$ ist $\xi = -120'' = -8^s,0$

$11^h,1$ $\xi_1 = -119 = -7,9$

$$\frac{a^0 - \alpha}{2} = + 0^s,49$$

$$\frac{\alpha_1 - a_1^0}{2} = + 2^s,62$$

$$\frac{(a^0 - \alpha) + (\alpha_1 - a_1^0)}{2} = + 3^s,11$$

$$+ \frac{\xi \operatorname{tg} \delta + \xi_1 \operatorname{tg} \delta_1}{2} = - 2^s,22$$

$$\beta \cos \varphi = + 0^s,89 = + 13''$$

In 6^h und 18^h beobachtet $\gamma = -2^s,1$. Im Meridian beobachtet $\gamma = -2^s,1$

1857 Juli 29. Reihe V zur Bestimmung von $\beta \cos \varphi$.

Sternzeit $21^h\ 35^m$ $\xi = - 150''$

$22\ \ 1$ $- 146$

$23\ \ 34$ $- 141$

363 Bootis ($t = 6^h$) $a^0 = 15^h\ 0^m\ 47^s,6$ i Tauri ($t = 18^h$) $a_1^0 = 4^h\ 42^m\ 51^s,5$

$\Theta = 21^h,0$ $47,6$ $\Theta_1 = 22^h,7$ $51,6$

$47,3$ $51,4$

$47,7$ $51,7$

$51,6$

$a^0 = 15^h\ 0^m\ 47^s,55$ $a_1^0 = 4^h\ 42^m\ 51^s,56$

$\alpha = 15\ \ 0\ \ 49,11$ $\alpha_1 = 4\ \ 43\ \ 1,78$

$\delta = + 19°\ 0'$ $\delta_1 = + 18°\ 35'$

für $\Theta = 21^h,0$ ist $\xi = - 150'' = - 10^s,0$

$22^h,7$ $\xi_1 = - 142 = - 9^s,5$

$$\frac{a^0 - \alpha}{2} = -0^s,78$$

$$\frac{\alpha_1 - a_1^0}{2} = +5^s,11$$

$$\frac{(a^0 - \alpha) + (\alpha_1 - a_1^0)}{2} = +4^s,33$$

$$+\frac{\xi \operatorname{tg} \delta + \xi_1 \operatorname{tg} \delta_1}{2} = -3^s,32$$

$$\beta \cos \varphi = +1^s,01 = +15''$$

In 6^h und 18^h beobachtet $\gamma = -5^s,9$. Im Meridian beobachtet $\gamma = -6^s,0$

Die mitgetheilten Beobachtungsreihen zeigen, daſs an der Realität des Werthes von $\beta \cos \varphi$ kein Zweifel ist. Um aber jede weitere Verwechselung dieser Biegung des Rohres mit der anderen Componente, die verschwindend klein ist, zu vermeiden, soll $\beta \cos \varphi$ mit b bezeichnet werden. b ist dann also die Wirkung der Schwere auf das Fernrohr in der Ebene der Declinations-Axe und der optischen Axe (Seitenbiegung) und ist an die Coordinaten ξ, welche in den Stundenwinkeln 6^h und 18^h bestimmt sind, als positive Correction anzubringen.

Eine Zusammenstellung der einzelnen Bestimmungen von b ergiebt folgendes:

Reihe	I.	$b = +19''$
	II.	$+23$
	III.	$+15$
	IV.	$+13$
	V.	$+15$
		$b = +17''$

b) Bestimmung der Coordinate η.

Aehnlich wie die Coordinate ξ wird auch η sowohl im Meridian als in den Stundenwinkeln 6^h und 18^h zu bestimmen sein. Die Beobachtungen im Meridian ergaben bei Anwendung der Formel (VI^a) die folgende Reihe von Werthen für die Coordinate η:

Datum der Beobachtung	Thermometer R.	η
1856 April 18	+ 8°	+ 98″
October 30	+ 4	70
December 9	+ 8	66
„ 10	+ 5	65
1857 Januar 6	— 6	40
„ 8	— 8	46
„ 21	0	41
„ 24	0	40
„ 31	— 7	40
Februar 7	— 3	34
„ 20	+ 2	50
„ 20	+ 1	47
Mai 15	+ 12	83
„ 15	+ 9	71
Juli 2	+ 20	138
1858 Februar 11	— 1	38
„ 11	— 1	+ 39

Aus dieser Tafel erkennt man, dafs auch die Coordinate η mit der Temperatur variirt, dafs jedoch diese Variationen geringer sind und etwas langsamer der Temperatur folgen als diejenigen von ξ. So ist z. B. die Veränderung von η zwischen 1857 Jan. 6 — Febr. 20 gering, obwohl die Temperatur eine Veränderung bis zu 10° erfährt.

Im Allgemeinen ist auch die Bewegung der Axe im Sinne von η so beschaffen, dafs die Coordinate nach Ablauf eines Jahres wieder zu demselben Werthe zurückkehrt. Denn es ist

1857 Januar	21	bei 0°	$\eta = +41''$
„	24	bei 0°	$\eta = +40''$
Februar	7	bei − 3°	$\eta = +34''$
Im Mittel		bei − 1°	$\eta = +38''$
1858 Februar	11	bei − 1°	$\eta = +38''$
„	11	bei − 1°	$\eta = +39''$

Aus der ganzen Untersuchung geht hervor, dafs η innerhalb weniger Stunden als constant betrachtet werden kann, während ξ sehr merkliche Aenderungen schon innerhalb einer Stunde erfährt.

Die Beobachtungen für die Coordinate η in den Stundenwinkeln 6^h und 18^h und die Berechnungen derselben mit Hülfe der Formel (VI^b) haben zu folgender Reihe von Werthen für $\eta + \beta \sin\varphi \cos\delta$ geführt:

Tafel der Werthe $\eta + \beta \sin\varphi \cos\delta$ bestimmt 1857 Febr 7.

Declination	$\eta + \beta \sin\varphi \cos\delta$	$\eta + \beta \sin\varphi \cos\delta$ beobachteter Werth	
$+ 88,5^\circ$	$\eta + 0{,}02\,\beta$	$+ 38,''8$	$35,''95$
86,2	$\eta + 0{,}04\,\beta$	36,6	
84,4	$\eta + 0{,}08\,\beta$	31,4	
80,0	$\eta + 0{,}13\,\beta$	37,0	
78,9	$\eta + 0{,}16\,\beta$	38,1	$34,5$
74,7	$\eta + 0{,}21\,\beta$	28,8	
71,0	$\eta + 0{,}26\,\beta$	37,6	
69,0	$\eta + 0{,}28\,\beta$	33,6	
66,8	$\eta + 0{,}30\,\beta$	35,2	$34,9$
64,1	$\eta + 0{,}33\,\beta$	36,8	
57,3	$\eta + 0{,}44\,\beta$	31,2	
53,2	$\eta + 0{,}47\,\beta$	36,4	
46,4	$\eta + 0{,}56\,\beta$	24,0	$30,9$
36,5	$\eta + 0{,}63\,\beta$	37,6	
29,4	$\eta + 0{,}70\,\beta$	33,8	
17,1	$\eta + 0{,}76\,\beta$	28,3	
		Mittel	$34,''1$

Diese Reihe zeigt ebenfalls, wie für die für β im Meridian angestellte Untersuchung, dafs eine Biegung des Fernrohres in einer zu der Declinationsaxe normalen Ebene innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Beobachtungen nicht sicher erkennbar ist. Das arithmetische Mittel aller Bestimmungen giebt daher einen

ziemlich genauen Werth der Coordinate η, so dafs an diesem Tage

$$\eta = +34,''1 \text{ (w. F. einer einzelnen Bestimmung } = \pm 3,''2)$$

angenommen werden kann.

Eine fast vollständige Bestätigung dieses Werthes ergeben die an demselben Tage (Febr. 7) angestellten Meridianbeobachtungen. Denn es fand sich

für δ Ursae min.	$t = +0^h,0$)	$\eta = +32,''7$
51 Cephei	($t = +0^h,0$)	$\eta = +34,''5$
		$\eta = +33,''6$

Eine weitere Bestätigung, dafs die betreffende Biegung des Fernrohres verschwindend klein ist, folgt aus den Beobachtungen, welche 1857 Januar 24 angestellt sind:

Stern	δ	t	$\eta \pm \beta \sin\varphi \cos\delta$	η beobachtet	
δ Urs. min.	+ 86° 36′	^{h} 6,0	$\eta + 0.04\,\beta$	+ 44,″0	+ 46,″0
51 Cephei	+ 87 15	18,0	$\eta - 0,03\,\beta$	+ 48,0	
α Cygni	+ 44 48	6,0	$\eta + 0,60\,\beta$	+ 50,6	+ 48,6
		„	$\eta + 0,60\,\beta$	+ 46,6	
ι Urs. maj.	+ 48 36	18,0	$\eta - 0,50\,\beta$	+ 47,1	+ 47,6
		„	$\eta - 0,50\,\beta$	+ 48,1	

Hieraus folgt höchstens $\beta + 0,''9$. Aufserdem liegen folgende Vergleichungen vor:

	bestimmt im Meridian	bestimmt in Stw. 6^h und 18^h	
1857 Januar 24	$\eta_\alpha = +40''$	$\eta_\delta = +47''$	$\eta_\alpha - \eta_\delta = -7''$
31	$= +40$	$+38$	$+2$
Mai 15	$+83$	$+85$	-2
			Im Mittel $= -2''$

Zum Schlufs der ganzen Untersuchung ist folgende in den Mittelwerthen etwas abgerundete Reihe von Ergebnissen zusammengestellt, welche die Abhängigkeit der Aufstellung des Instrumentes von der Temperatur veranschaulicht.

Thermometer R.	η	ξ	χ	σ
— 8°	+ 40″	+ 135″	141″	1h 6m
— 4	+ 40	+ 100	111	1 41
0	+ 45	+ 60	75	2 27
+ 4	+ 55	+ 10	56	5 23
+ 8	+ 70	— 50	86	8 22
+ 12	+ 90	— 110	142	9 23
+ 16	+ 115	— 160	197	9 37
+ 20	+ 140	— 210	201	9 45

Aus dieser Tafel geht deutlich hervor, dafs die Abhängigkeit der Coordinaten der Instrumental-Axe von der Temperatur bei niedrigerer Temperatur etwas geringer ist als bei höherer. Es sind nämlich, bezogen auf einen Centigrad als Einheit der Temperatur-Incremente, die Differential-Quotienten von ξ und η nach der Temperatur ϑ die folgenden:

bei — 7°,5 C.	$\frac{d\xi}{d\vartheta} = -7''$	$\frac{d\eta}{d\vartheta} = 0$
„ — 2°,5	„ — 8	„ + 1
„ + 2°,5	„ — 10	„ + 2
„ + 7°,5	„ — 12	„ + 3
„ + 12°,5	„ — 12	„ + 4
„ + 17°,5	„ — 12	„ + 5
„ + 22°,5	„ — 12	„ + 5

Durch Anbringung von Niveaux hat sich denn auch ergeben, dafs weder das Fundament noch die Fufsschrauben des Holzstatives oder sonstige Metalltheile der Sitz jener Variationen sind, dafs vielmehr in den grofsen Holzbalken, insbesondere in der Verbindung der die Lager der Hauptaxe tragenden Messingplatte mit dem grofsen schrägen Balken, auf welchem dieselbe befestigt ist, der eigentliche Sitz der beobachteten Variationen ist.

Es wurde nämlich ein Niveau an jener Metallplatte in der Meridian-Ebene angebracht und ein zweites noch empfindlicheres

auf den horizontalen Balken gesetzt, der, von Norden nach Süden gerichtet, direct auf den Fufsschrauben ruht. Während nun das Niveau der Metallplatte jene grofsen Variationen wirklich angab, welche die Coordinate ξ erfährt, zeigte das Niveau auf dem horizontalen Balken nur sehr geringe Veränderungen.

Im Folgenden sollen die beobachteten Mittelwerthe dieser Ablesungen angeführt werden, da eine ausführliche Mittheilung der Beobachtungsreihen zu weit führen würde.

Thermometer C.	Niveau an der Metallplatte: $1^p = 34'',0$ (ξ)	Niveau auf dem horizontalen Balken: $1^p = 6'',6$ (ξ)
$+5,2°$	$0''$	$0''$
$+3,4$	$+21$	0
$+0,8$	$+40$	-2
$-0,9$	$+53$	$+4$
$-4,1$	$+87$	$+13$
$-7,1$	$+110$	$+22$
Nach Umlegung des zweiten Niveaus ($1^p = 6'',6$)		
$-3,8°$	$0''$	$0''$
$+1,2$	-34	$+12$
$+3,9$	-95	$+9$
$+5,4$	-124	$+2$

Hiernach ergiebt sich nach dem Niveau auf dem schrägen Strebebalken:

zwischen $+5°,2$ und $-7°,1$ C. $\frac{d\xi}{d\vartheta} = -9''$

zwischen $-3°,8$ und $+5°,4$ „ $= -13$

also ziemlich übereinstimmend mit der obigen Tafel, während das andere Niveau das eine Mal $-2''$, das andere Mal noch weniger ergiebt.

Es ist von Interesse, nachzuforschen, ob entsprechende Ver-

änderungen der Aufstellung auch an anderen älteren Aequatorialen, welche wie das unserige auf einem Holzstativ ruhten, wahrgenommen worden sind.

Bei dem Instrumente in Dorpat (vergl. Struve, Mensurae Micrometricae p. XXV) war die Aufstellung ebenfalls von der Temperatur abhängig, und die Variationen der Coordinaten ξ und η entsprechen dem Zeichen nach den an unserem Instrumente beobachteten, während sie der Gröfse nach geringer waren.

Am Heliometer in Bonn, dessen Holzstatif erheblich jünger war, hat Winnecke eine schnelle Veränderung der Coordinate ξ nicht wahrgenommen.

Am meisten constant hat sich die Aufstellung des Königsberger Heliometers zu Bessel's Zeiten gehalten, wie aus einer Zusammenstellung in den Astron. Untersuchungen Bd. I, S. 151 hervorgeht. In späterer Zeit jedoch ist diese Constanz einer deutlichen Veränderlichkeit der Aufstellung gewichen.

Schon in den Jahren 1848 und 1849 ist eine Abhängigkeit insbesondere der Coordinate ξ von der Temperatur wahrnehmbar, welche vollständig der oben bei dem Berliner Stativ beobachteten entspricht. Wichmann hat diese Veränderlichkeit in der 29. Abtheilung der Königsberger Beobachtungen auf Seite 104 bereits ausdrücklich hervorgehoben.

Hiermit stimmt es überein, dafs auch die Aufstellung des Berliner Aequatorials in der ersten Zeit seiner Benutzung nicht entfernt eine solche Veränderlichkeit gezeigt hat. Diese Erscheinung ist aber überhaupt bei hölzernen Stativen und Pfeilern ziemlich allgemein, auch in der Geodaesie, beobachtet worden. In frischerem Zustande des Holzes scheinen die inneren Feuchtigkeitszustände desselben die Abhängigkeit von der Temperatur zu vermindern, in älterem Zustande des Holzes ist dasselbe aber offenbar den unmittelbaren und mittelbaren Wirkungen der Veränderungen der Lufttemperatur, zumal in hygroskopischer Beziehung, stärker unterworfen.

Die in den Jahren 1856—58 von mir nachgewiesene starke Veränderlichkeit der Aufstellung des Berliner Refractors auf dem Münchener Holzstatif hatte einen Grad erreicht, bei welchem sie sogar den Micrometer-Beobachtungen gefährlich wurde.

Im Jahre 1864 ist sodann, nachdem in der Zwischenzeit auf Grund der vorstehenden Darlegungen alle Vorsicht geübt worden war, das Instrument von dem Holzstativ abgenommen und auf einem Steinpfeiler montirt worden. Hiermit ist aber, wie spätere Mittheilungen erweisen werden, eine aufserordentliche Beständigkeit der Aufstellung erreicht worden.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

1) Ueber die bisherigen Annahmen in den Transformations-Elementen der astronomischen Ortsangaben. Erste Abhandlung. (Zuerst veröffentlicht im Berliner Astronomischen Jahrbuche für 1869) 1

2) Ueber die bisherigen Annahmen in den Transformations-Elementen der astronomischen Ortsangaben. Zweite Abhandlung. (Zuerst veröffentlicht im Berliner Astronomischen Jahrbuche für 1870) 34

3) Zur Theorie des Durchgangs-Instrumentes. Erste Abhandlung. (Zuerst veröffentlicht im Berliner Astronomischen Jahrbuche für 1880) . . . 50

4) Zur Theorie des Durchgangs-Instrumentes. Zweite Abhandlung. (Zuerst veröffentlicht im Berliner Astronomischen Jahrbuche für 1882) 90

5) Untersuchungen über Pendel-Uhren. (Zuerst veröffentlicht in den Astronomischen Nachrichten No. 2182—2184, Bd. 91. 1878) 115

6) Untersuchungen über das Fraunhofer'sche Aequatorial. (Zuerst veröffentlicht im V. Bande der Beobachtungen der Berliner Sternwarte. 1884.) 160

Druck von G. Bernstein in Berlin.

In **Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung** in **Berlin** erschien ferner:

Encke, J. F., Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen. Erster Band. **Allgemeines betreffend Rechnungsmethoden.** 1888. 7 Mark.

Inhalt: Interpolation. Mechanische Quadratur. Methode, zu den Formeln der mechanischen Quadratur zu gelangen. Cotes'ische Integrations-Faktoren. Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen. Entwickelung einer Function in eine periodische Reihe.

Foerster, Wilhelm, Professor und Direktor der Sternwarte Berlin, **Sammlung wissenschaftlicher Vorträge.** 4 Mark.

Inhalt: Die Astronomie des Alterthums und des Mittelalters im Verhältniss zur neueren Entwickelung. Johann Keppler und die Harmonie der Sphären Zeitmaasse und ihre Verwaltung durch die Astronomie. Astronomische Weltansichten und Probleme. Nicolaus Copernicus. Wahrheit und Wahrscheinlichkeit etc.

Kirchhoff, G., Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. Zwei Theile. Mit Tafeln. Dritter Abdruck. 8 Mark.

Littrow, Wunder des Himmels oder Gemeinfaßliche Darstellung des Weltsystems. Siebente Auflage, bearbeitet von **Dr. Edmund Weiß.** Mit 15 lithogr. Tafeln und 148 Holzschnitt-Illustrationen. 17 Mark. gebunden 20 Mark.

Littrow, Atlas des gestirnten Himmels. Für Freunde der Astronomie. Vierte, vielfach umgearbeitete und vermehrte Auflage. Herausgegeben von **Dr. Edmund Weiß.** 19 Blatt Sternkarten ꝛc. mit Text. 4 Mark, gebunden 6 Mark.

Müller, Dr. G., Untersuchungen über Mikrometerschrauben mit besonderer Anwendung auf das Fadenmikrometer des neunzölligen Aequatoreals der Berliner Sternwarte. 1 Mark.

Pfeil, L. Graf v., **Kometische Strömungen auf der Erdoberfläche.** Dritte, mit den neuesten Beweisen verstärkte und umgearbeitete Auflage. Mit fünf Karten. 6 Mark.

Pfeil, L. Graf v., **Mathematische und physikalische Entdeckungen** gefunden und zusammengestellt. Mit 6 lith. Tafeln. 5 Mark.

Schmidt, Dr. A., Bestimmung der Theilungsfehler am Pistor'schen Meridiankreise der Berliner Sternwarte. 1 Mark.

Tietjen, F., und **P. Lehmann, Tafel vierstelliger Logarithmen** zusammengestellt. 1 Mark.

Druck von G. Bernstein in Berlin.

J. Grubel

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Foerster, Wilhelm,

Studien zur Astrometrie gesammelte Abhandlungen

Berlin 1888
Astr.u. 54 ob
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11554960-7